BANCO CENTRAL DE COSTA RICA

DOCUMENTOS DE TRABAJO
08|2025

Estructura temporal de tasas en colones (curva cero cupón) para Costa Rica: metodología y derivación de tasas a plazo y prima de riesgo cambiario

Juan José Víquez Rodríguez
Laura Campos Quesada
Isaac Zúñiga Arias

Fotografía de portada: “Presentes”, conjunto escultórico en bronce, año 1983, del artista costarricense Fernando Calvo Sánchez. Colección del Banco Central de Costa Rica.

Estructura temporal de tasas en colones (curva cero cupón) para Costa Rica: metodología y derivación de tasas a plazo y prima de riesgo cambiario

Juan José Víquez Rodríguez‡
Laura Campos Quesada†
Isaac Zúñiga Arias+

Las ideas expresadas en este documento son de los autores y no necesariamente representan las del Banco Central de Costa Rica.

Resumen

El presente documento consolida las definiciones teóricas fundamentales para la construcción de la Curva Cero Cupón en colones para la economía costarricense. Inicialmente se presentan los fundamentos teóricos que respaldan la metodología empleada y se establece la modelación de la curva cero cupón ajustada específicamente para las transacciones de mercado secundario costarricense, especificando las condiciones de no arbitraje que deben ser seguidas por la optimización para asegurar que la curva obtenida al final sea coherente con la teoría. Posteriormente, se explican los métodos heurísticos utilizados en la optimización de los parámetros de las curvas Svensson y Nelson-Siegel con restricciones. Finalmente, se desarrollan indicadores y curvas asociadas, tales como la Curva Par, las tasas forward y la prima por riesgo cambiario.

Palabras clave: Nelson-Siegel, Svensson, Curva Cero Cupón, Optimización Heurística, Curva Par, Tasas Plazo, Riesgo Cambiario.
Clasificación JEL.: E43, G12, C58, C61, H63

‡ Departamento de Investigación Económica. División Económica, BCCR. viquezrj@bccr.fi.cr
† MSc. en Analytics, Innovación y Tecnología del INCAE Business School, Actuaria de la UCR. laura.camposquesada@ucr.ac.cr
+ Licenciado con Honores en Ciencias Actuariales de la UCR. isaac.actuario@gmail.com

Term Structure of Interest Rates in Costa Rican Colones (Zero-Coupon Curve): Methodology and Derivation of Forward Rates and the Exchange Risk Premium

Juan José Víquez Rodríguez‡
Laura Campos Quesada†
Isaac Zúñiga Arias+

The ideas expressed in this paper are those of the authors and not necessarily represent the view of the Central Bank of Costa Rica.

Abstract

The current document consolidates the fundamental theoretical definitions for constructing the Zero-Coupon Curve in colones for the Costa Rican economy. Initially, the theoretical foundations supporting the employed methodology are presented, and the modeling of the zero-coupon curve is established, specifically adjusted for Costa Rican secondary market transactions. This includes specifying the no-arbitrage conditions that must be followed during optimization to ensure that the resulting curve aligns coherently with the theory. Subsequently, the heuristic methods used in optimizing the parameters of Svensson and Nelson-Siegel curves with constraints are explained. Finally, indicators and associated curves are developed, such as Par Yield Curve, forward rates and exchange risk premium.

Key words: Nelson-Siegel, Svensson, Zero-Coupon Curve, Heuristic Optimization, Par Yield Curve, Forward Rates, Exchange Risk Premium.
JEL codes: E43, G12, C58, C61, H63

‡ Departamento de Investigación Económica. División Económica, BCCR. viquezrj@bccr.fi.cr
† MSc. en Analytics, Innovación y Tecnología del INCAE Business School, Actuaria de la UCR. laura.camposquesada@ucr.ac.cr
+ Licenciado con Honores en Ciencias Actuariales de la UCR. isaac.actuario@gmail.com

Contenido

Índice

1. Introducción **1**

2. Marco Teórico **3**

2.1. Teoría de Valoración 4

2.1.1. Teoría del Interés 4

2.1.2. Conceptos de Ingeniería Financiera 6

2.1.3. Bonos Cero Cupón y Cuponados 8

2.1.4. Curva Par 13

2.1.5. Contratos Forward y Tasas de Interés Forward 15

2.1.6. Tasas Forward Instantáneas 17

2.1.7. Contratos Forward de Tipo de Cambio y Tipo de Cambio Forward . 18

2.1.8. Premio Cambiario 21

2.2. Modelación de la Curva: Nelson-Siegel & Svensson 22

2.3. Algoritmos de Optimización 24

2.3.1. Nelder-Mead 26

2.3.2. Algoritmo Genético 26

2.3.3. Sobrecalentamiento Simulado (Simulated Annealing) 28

2.3.4. Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) 28

3. Construcción de la Curva **28**

3.1. Insumos del Modelo 29

3.2. Parámetros de la Optimización 30

3.3. Ajustes de los Parámetros de la Optimización 32

3.3.1. Comparación de Algoritmos de Optimización 32

3.3.2. Ajuste del Parámetro de Ponderación del Rezago 33

3.4. Calidad del Ajuste Final 34

4. Estimación de la ETTI: Curva Cero Cupón e Indicadores **35**

4.1. Interpretación de las Curvas Cero Cupón 36

4.2. Curva Cero Cupón y Curva Par 39

4.3. Curva Cero Cupón Forward 40

4.4. Tipo de Cambio Forward y Premio Cambiario 41

5. Conclusiones y Limitaciones **43**

1. Introducción

La valoración de activos típicamente requiere descontar flujos de caja futuros a distintos horizontes. Conocer la estructura temporal de tasas de interés a través de una curva cero cupón permite realizar valoraciones consistentes con el valor del dinero en el tiempo y el no-arbitraje, medir y descomponer riesgos (de mercado, de crédito y cambiario), y derivar indicadores como tasas forward, curva par y primas de riesgo, relevantes para decisiones financieras y de política económica. Esta necesidad es ampliamente reconocida por los bancos centrales y supervisores; por ejemplo, el Banco de Pagos Internacionales (Bank of International Settlements - BIS) presenta en BIS (2005) metodologías de múltiples países para construir curvas de descuento libres de arbitraje.

Este documento presenta una metodología para estimar la curva cero cupón en colones para Costa Rica, libre de arbitraje, y muestra cómo, a partir de ella, se obtienen las tasas forward, la curva par -inspirado en el trabajo de Gürkaynak et al. (2006) de la Reserva Federal-, así como un conjunto de indicadores de premio cambiario. La propuesta está diseñada para ser operable con datos de mercado locales y para producir precios teóricos y medidas de riesgo que sean coherentes y comparables a estándares internacionales. Se utilizan bonos cero cupón y bonos cuponados a tasa fija emitidos por el Gobierno y el Banco Central en colones, abarcando todo el espectro de vencimientos disponibles en el mercado local. La elección de instrumentos elegibles y los pesos buscan balancear representatividad y vigencia, lo que permite un anclaje robusto del extremo corto y del tramo medio-largo.

Durante las últimas dos décadas se han venido realizando varios desarrollos para construir una curva cero cupón en colones para Costa Rica. La Bolsa Nacional de Valores (BNV) desarrolló una metodología para estimar la curva de rendimientos en donde se estimaban las *"Tasas Internas de Retorno"* (TIR) de los instrumentos transados, se promediaban para los distintos plazos y se obtenían los nodos de TIR observados (promedios), con los cuales, a través de una interpolación, les permitía estimar las tasas internas de retorno de los instrumentos no observados. Sin embargo, esta técnica no es apropiada porque genera precios de arbitraje al promediar tasas que no son comparables, lo que deviene en problemas de valoración importantes para los agentes de mercado.

Para corregir esta metodología, se presentaron varias propuestas que permitieran obtener una construcción de la *"Curva Cero Cupón"* que brindara precios de no-arbitraje para los instrumentos no transados y que fuera coherente con el comportamiento de mercado. Los primeros esfuerzos en esta línea se pueden ver en el artículo de Alpízar et al. (2005) de la Academia de Centroamérica donde se presentan varias metodologías trabajadas en distintas instituciones (BNV, Ministerio de Hacienda, Banco Central, INCAE, entre otros).

Sin embargo, a pesar de que en esos trabajos se presentaban herramientas útiles, como los llamados *"Splines Cúbicos"*, y modelos paramétricos (la curva de Nelson-Siegel y la de Svensson), los métodos propuestos se alimentaban de las TIR, lo que seguía generando problemas de valoración por la introducción de arbitraje en los precios estimados.

Paralelamente a estos esfuerzos, Víquez et al. (2005) trabajaron en la construcción de la curva cero cupón desde la Dirección Corporativa de Riesgo del Banco Nacional (BNCR), inspirados en la metodología del Banco de Canadá (1999), la cual se ajustó a la realidad de Costa Rica, donde se estableció una función de error (con ponderaciones) que tomó en cuenta el arbitraje y evitó el empleo de tasas TIR. Se realizaba un ajuste del modelo paramétrico de Svensson a los datos de mercado, el cual incluía la horquilla[1] y el plazo al vencimiento de los instrumentos.

A pesar del avance que presentaba esta metodología del BNCR, los valores óptimos eran dependientes del valor inicial de la optimización, producto de utilizar métodos de gradiente decreciente, tales como Gauss-Newton y Marquardt. En el artículo de Piza et al. (2014) se establece esta situación y se sugiere el uso de metaheurísticas para subsanarla.

Quirós y Trejos (2017) realizaron la implementación del método de Víquez et al. (2005) aplicando metaheurísticas en la optimización de parámetros para los modelos de Nelson-Siegel y Svensson (sin arbitraje), obteniendo resultados de acelerada convergencia con los métodos de *"Sobrecalentemiento Simulado"* y *"Optimización por Enjambre de Partículas"*. En este artículo también se implementaron los algoritmos de *"Colonias de Hormigas"* y *"Algoritmo Genético"*. La optimización realizada tenía restricciones para preservar la coherencia financiera, tales como evitar tasas de interés negativas; sin embargo, no utilizaron restricciones no-lineales que aseguraran que los parámetros derivaran en curvas de no arbitraje (ej. factores de descuento estrictamente decreciente), aunado a que el espacio de búsqueda ignoraba los resultados previos (no había aprendizaje en el algoritmo).

En el Banco Central (2020) se creó una metodología para una *"Curva Soberana"* que consiste en la construcción de una curva par, por lo que no se atiende la necesidad de contar con una curva cero cupón que sirva para valorar instrumentos, estimar riesgos y obtener indicadores tales como el riesgo país, curva de expectativas de tipo de cambio y tasas forward. En Alfaro y Naranjo (2023) se presenta la necesidad de tener una curva cero cupón en Costa Rica y el impacto que tendría para la economía nacional.

La contribución establecida en esta metodología es triple:

[1] *"La horquilla de precios, también llamada "spread", es la diferencia de precios que hay entre la mejor orden de compra y la mejor orden de venta en el mercado de valores."* Definición tomada de `https://www.rankia.com/diccionario/trading/horquilla-precios`.

i **No-Arbitraje:** Se abandona el uso de la TIR como insumo de modelación, en vista de que mezcla instrumentos no comparables y puede inducir precios de arbitraje, y se trabaja directamente con los precios observados (y los rendimientos implícitos) de los instrumentos. Se implementan restricciones de no arbitraje para los modelos de Nelson–Siegel y de Svensson, imponiendo la monotonía de factores de descuento y condiciones que evitan forwards implícitos "patológicos"

ii **Optimización Adaptativa con *"Warm Start"*:** Se realiza la optimización usando metaheurísticas tales como sobrecalentamiento simulado ("simulated annealing"), enjambre de partículas ("particle swarm") y algoritmo genético, y también bajo el método simplex descendente de Nelder-Mead. Las restricciones son dinámicas en función de la solución obtenida el día anterior, mientras que los valores iniciales también se actualizan con cada nueva iteración, lo que permite que el proceso de optimización evolucione gradualmente conforme cambia la información disponible.

iii **Modelación Adapatada:** Se incorpora una función de pérdida ponderada por monto transado y por antigüedad cada una de las observaciones, para compensar la baja bursatilidad. La modelación incluye factores como el impuesto sobre las ganancias de capital, de modo que la comparación de precio observado versus precio teórico sea adecuada. Con ello, se obtiene un mejor ajuste de precios y los indicadores derivados de esta curva son más estables y económicamente interpretables.

En el presente documento se presenta la metodología desarrollada para la construcción de una "Curva Cero Cupón en Colones para el Mercado Costarricense". El documento se organiza de la siguiente forma: en la sección 2 se mencionan los principales resultados de la teoría de valoración con impuestos sobre ganancias de capital, así como la explicación técnica de los métodos de optimización implementados y de los modelos de Nelson-Siegel y Svensson. En la sección 3, se establecen los resultados del ajuste del modelo y se desarrollan los indicadores derivados de la curva cero cupón, así como su interpretación económica. Finalmente, en la sección 4 se presentan las conclusiones y los comentarios finales, así como algunas áreas de desarrollo para futuras investigaciones.

2. Marco Teórico

En esta sección se presentan los principales resultados de la teoría de valoración que es aplicada para establecer los precios teóricos de no arbitraje y sus condiciones. Después se establece la teoría desarrollada por Nelson y Siegel, así como la generalización de Svensson, las cuales buscan modelar paramétricamente la forma teórica de la curva cero cupón. Finalmente, se explican las técnicas de optimización utilizadas para alcanzar los parámetros óptimos de la curva cero cupón de mercado.

2.1. Teoría de Valoración

En este apartado se ahonda en los principales resultados de la teoría de valoración, donde se incluyen elementos importantes como lo son la modelación matemática de arbitraje y de impuestos sobre las ganancias de capital, entre otros. Se construyen matemáticamente los elementos primordiales, tales como las tasas forward (estándar e instantáneas), curva par y riesgo país.

2.1.1. Teoría del Interés

A lo largo del presente documento se utilizará el esquema de interés compuesto, el cual consiste en reinvertir **el principal y los intereses** generados en periodos anteriores. Se utiliza también la herramienta matemática de interés compuesto continuamente, donde a la tasa de interés que se paga en el instante t (que reinvierte el principal y los intereses generados hasta ese momento) se le llama *"fuerza de interés"* y se denota por r_t.

Se denota por $\tau(t,T)$ a la medida escogida para contar el tiempo que hay entre dos fechas o dos momentos t y T. Se va a utilizar la convención 30/360, donde los meses tienen 30 días y los años son de 360 días. En este caso, la proporción de años entre dos fechas $D_1 = d_1/m_1/y_1$ y $D_2 = d_2/m_2/y_2$ estaría dada por la siguiente fórmula:

$$\tau(t,T) = \frac{\text{máx}\{30-d_1,0\} + \text{mín}\{d_2,30\} + 30\cdot(m_2-m_1-1) + 360\cdot(y_2-y_1)}{360},$$

donde y_i es el año, m_i es el mes, d_i es el día (con hora, minuto y segundo - para utilizarlo en modo continuo), correspondiente a la $i-$ésima fecha, para $i = 1, 2$. Por ejemplo, si T es el 29 de enero del 2024 a las 11:30:00 am, entonces la fecha es $29,479\overline{166}/01/2024$, pues a esa hora han transcurrido $29,479\overline{166}$ días del mes de enero del 2024.

Sea $A(t,T)$ el factor de acumulación de interés compuesto (continuamente), es decir, si en t se invierten K colones, entonces para el momento T se tendrían $K\cdot A(t,T)$ colones. En el caso de existencia de impuestos sobre las ganancias de capital, de porcentaje θ (sobre los intereses),[2] entonces el factor de acumulación (crecimiento del capital) se ve afectado en cada periodo de inversión.

[2] El inciso *c* del artículo 23 de la Ley del Impuesto sobre la Renta (No. 7092) se indica lo siguiente "*c) Estarán sujetas a retención las rentas del capital mencionadas en los incisos 1) y 2) del artículo 27 ter de esta ley. Están obligados a retener los emisores, los agentes pagadores, las entidades de custodia, las sociedades anónimas y otras entidades públicas o privadas, que en función de captar recursos del mercado financiero resulten exigibles o paguen intereses, o concedan descuentos sobre pagarés y toda clase de títulos valores a personas domiciliadas en Costa Rica, así como los intermediarios que intervengan o, en su defecto, quienes efectúan la recompra, respecto de las rentas derivadas de las operaciones de recompra o reporto de valores, en sus diferentes modalidades, sea en una o varias operaciones simultáneas...*

Por ejemplo, si se invierte ₡1 bajo interés compuesto por un periodo a la tasa i, entonces el valor acumulado al final del periodo estaría dado por $₡1 \cdot A(0,1) = 1 + (1-\theta)\cdot i \cdot \tau(0,1)$ colones, ya que $₡i \cdot \theta \cdot \tau(0,1)$ es la parte de los ingresos de capital que debe ser pagada a tributación.

Considere un momento t fijo. Si en cada intervalo de inversión $(s, s+\Delta s)$ se paga una fuerza de interés fija r_s (proporcional al periodo de inversión) sobre el valor acumulado $A(t,s)$ al inicio del intervalo, con un impuesto θ fijo, entonces el inversor recibe, en el momento $s+\Delta s$, un monto igual a $(1-\theta)\cdot r_s \cdot \big(\tau(t, s+\Delta s) - \tau(t,s)\big)\cdot A(t,s)$ unidades de dinero por concepto de intereses. Como $\tau(t,s) + \tau(s,T) = \tau(t,T)$ para todo $t \le s \le T$ $\big($aditividad de la función $\tau(t,T)\big)$, entonces $\big(\tau(t,s+\Delta s) - \tau(t,s)\big) = \big(\tau(0,s+\Delta s) - \tau(0,s)\big)$. De este modo, el cambio en el valor acumulado $A(t,T)$, con condición inicial $A(t,t)=1$, está dado por

$$\begin{aligned}
&\Delta A(t; s, s+\Delta s) := A(t, s+\Delta s) - A(t,s) = (1-\theta)\cdot r_s \cdot \big(\tau(0,s+\Delta s) - \tau(0,s)\big)\cdot A(t,s) \\
&\quad \Longrightarrow \sum_s \frac{1}{A(t,s)} \cdot \frac{A(t,s+\Delta s) - A(t,s)}{\Delta s} \cdot \Delta s = \sum_s (1-\theta)\cdot r_s \cdot \big(\tau(0,s+\Delta s) - \tau(0,s)\big) \\
&\xrightarrow[\Delta s \to 0]{} \underbrace{\int_t^T \frac{\partial_s A(t,s)}{A(t,s)} ds}_{= \ln(A(t,T))} = \int_t^T (1-\theta)\cdot r_s \cdot d_s\tau(0,s) \implies A(t,T) = e^{(1-\theta)\int_t^T r_s \cdot d_s\tau(0,s)}, \qquad (1)
\end{aligned}$$

donde $\int_t^T r_s \cdot d_s\tau(t,s)$ es una integral de Riemann-Stieltjes con respecto a la función $\tau(t,s)$. Note que $\tau(0,\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una función absolutamente continua (es casi siempre[3] derivable), entonces $\partial_s\tau(0,s)$ existe para casi todo $s \in \mathbb{R}^+$ y se cumple la relación dada por $\int_t^T r_s \cdot d_s\tau(0,s) = \int_t^T r_s \cdot \partial_s\tau(0,s)\, ds$ (esta última es una integral de Riemann).

Otros conceptos que resultan necesarios para el desarrollo del presente documento son el de *"valor presente"* y *"factor de descuento"*. El valor presente de un flujo H, pagado en el momento $T > t$, es la cantidad K que debe ser invertida en el instante t, bajo interés compuesto, de manera tal que en T se cumpla que $H = K \cdot A(t,T)$.

Definición 1. *Se denota por $D(t,T)$ al factor de descuento, entre los instantes t y T, el cual representa el monto en el tiempo t que es **"equivalente"** a una unidad de dinero pagable en el tiempo T, y está dado por*

$$D(t,T) := \frac{1}{A(t,T)} = e^{-(1-\theta)\int_t^T r_s d_s\tau(0,s)}. \qquad (2)$$

El valor presente en el tiempo t, de un flujo H pagado en el momento T, es $H \cdot D(t,T)$.

[3] *"Casi Siempre"* significa que es derivable en todo $x \in \mathbb{R}^+$ excepto para un conjunto de medida cero.

2.1.2. Conceptos de Ingeniería Financiera

Como las tasas de interés r_t son estocásticas, los valores acumulados y los factores de descuento son estocásticos también y por ende desconocidos, lo cual plantea un reto a la hora de valorar. Si H es un flujo en el momento $T > t$, ¿cuál es el valor presente $H \cdot D(t,T)$ si el factor de descuento $D(t,T)$ es desconocido en t? Para poder responder a esta pregunta es necesario establecer algunos conceptos de ingeniería financiera.

Definición 2 (No-Arbitraje)**.** *Si $\phi_t^{(i)}$ son las unidades del activo i que tiene un portafolio y $S_t^{(i)}$ es el precio de ese activo, en el tiempo t, entonces el valor del portafolio sería $V_t = \sum_{i=1}^N \phi_t^{(i)} S_t^{(i)}$. Se dice que no hay arbitraje si es imposible que:*

$$V_0 = \sum_{i=1}^{N} \phi_0^{(k)} S_0^{(k)} = 0,\ \mathbb{P}[V_T \geq 0] = 1,\ \mathbb{P}[V_T > 0] > 0.$$

En otras palabras, no-arbitraje es la imposibilidad de invertir 0 unidades de dinero hoy ($V_0 = 0$) y tener en el futuro garantía de no perder dinero $\big(\mathbb{P}[V_T \geq 0] = 1\big)$ con posibilidad de ganar dinero en algún escenario $\big(\mathbb{P}[V_T > 0] > 0\big)$, es decir, crear dinero de la nada. Aquí la medida $\mathbb{P}$ se conoce como la "medida del mundo real", "medida estadística" o "medida objetiva". Por ejemplo, si X es la variable aleatoria asociada al lanzamiento de una moneda balanceada ($X = 0$ si sale corona y $X = 1$ si sale escudo), entonces bajo la medida estadística $\mathbb{P}$ se cumple que $\mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{2} = \mathbb{P}[X = 1]$ pues la mitad de las veces cae corona y la mitad de las veces sale escudo.

Definición 3 (Estrategia Autofinanciada)**.** *Considere un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, y una filtración $\big(\mathcal{F}_t\big)_{t\geq 0}$. Una estrategia de inversión es un proceso $(N+1)-$dimensional $\boldsymbol{\phi}_t = \big(\phi_t^{(0)}, \phi_t^{(1)}, \ldots, \phi_t^{(N)}\big)$ predecible. El proceso de valor asociado a la estrategia $\boldsymbol{\phi}$ se define por*

$$V_t(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\phi}_t \cdot \boldsymbol{S}_t = \sum_{k=0}^{N} \phi_t^{(k)} S_t^{(k)},$$

y el proceso de ganancia asociado a $\boldsymbol{\phi}$ es

$$G_t(\boldsymbol{\phi}) = \int_0^t \boldsymbol{\phi}_s \cdot d\boldsymbol{S}_s = \sum_{k=0}^{N} \int_0^t \phi_s^{(k)} dS_s^{(k)}.$$

Una estrategia de inversión se dice que es "auto-financiada" si $V_t(\boldsymbol{\phi}) \geq 0$ y

$$V_t(\boldsymbol{\phi}) = V_0(\boldsymbol{\phi}) + G_t(\boldsymbol{\phi}).$$

Para entender la definición anterior, se puede pensar en realizar una estrategia donde no se agrega ni saca dinero, sino que la inversión inicial es la única inyección de capital y todos los rendimientos generados son reinvertidos en instrumentos financieros.

Junto a estas definiciones tan importantes, se ocupa integrar el concepto de *"juego justo"* de manera matemática, lo cual se logra a través de la idealización de *"martingalas"*.

Definición 4 (Martingalas)**.** *Un proceso estocástico* $\left(X_t\right)_{t\geq 0}$ *se llama* $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}-$*martingala si las siguientes condiciones se cumplen:*

1. X *está adaptado a la filtración* $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}$.
2. *Para cada* t, $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$.
3. *Para todo* s *y* t, *con* $s \leq t$,
$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s.$$

En palabras sencillas, una martingala es un proceso estocástico para el cual, la esperanza del valor futuro de X, dada la información que se tiene disponible hasta "hoy", debe ser igual al valor observado de X "hoy".

Definición 5 (Medida Martingala Equivalente a $\mathbb{P}$)**.** *Una* ***Medida Martingala*** $\mathbb{Q}$ *equivalente a* $\mathbb{P}$, *llamada* ***"Medida de Riesgo Neutral"****, es una medida de probabilidad en el espacio medible* $(\Omega, \mathcal{A})$ *tal que*

1. $\mathbb{Q}$ *y* $\mathbb{P}$ *son equivalentes, i.e.,* $\mathbb{Q}(A) = 0$ *si y solo si* $\mathbb{P}(A) = 0$, *para todo* $A \in \mathcal{A}$.
2. *La derivada de Radon-Nikodym* $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ *es tal que* $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)^2\right] < \infty$.
3. *El proceso del "valor del activo descontado"* $D(0,\cdot)\cdot \boldsymbol{S}$ *es una* $\mathcal{F}_t-$*martingala respecto a* $\mathbb{Q}$, *i.e.,*
$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(0,t)\cdot S_t^{(k)} \;\middle|\; \mathcal{F}_s\right] = D(0,s)\cdot S_s^{(k)},$$
para todo $k = 0,\ldots,N$, *y todo* $0 \leq s \leq t \leq T$, *donde el factor de descuento* $D(t,T)$ *(estocástico) está dado por* (2).

La valoración parte de dos principios: 1- Replicación bajo no arbitraje; 2- Esperanza matemática bajo la medida $\mathbb{Q}$. Para esto es importante definir la replicación en términos de estrategias de inversión.

Definición 6 (Estrategia de Replicación y Completitud)**.** *Un flujo es una variable aleatoria (cuadrado integrable) en* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *Un flujo* H *se dice* ***"accesible"*** *si existe alguna estrategia de inversión autofinanciada* ϕ *tal que* $V_T(\phi) = H$. *La estrategia de inversión* ϕ *se dice que* ***"replica"*** *al flujo* H *(estrategia de replicación). Si en un mercado financiero se cumple que todo flujo es accesible entonces se dice que el mercado es* ***"completo"****.*

Ya con estos conceptos se puede enunciar lo que es el corazón de la teoría de valoración.

Teorema 1 (Teorema Fundamental de la Valoración (TFV))**.** *Para un mercado financiero se cumple que:*

- *El mercado está libre de arbitraje si y solo si existe una medida martingala* $\mathbb{Q}$*.*
- *El mercado es completo si y solo si la medida martingala equivalente* $\mathbb{Q}$ *es única.*
- *Si el mercado es libre de arbitraje entonces el valor* $\pi_t(H)$ *en* t *de cualquier flujo* H *(pagado en* T*) accesible está unívocamente determinado por:*
  - ***Estrategia de Replicación:*** *El monto* $\pi_t(H) = V_t(\phi)$ *sería el valor al tiempo* t *del flujo* H *para toda estrategia de replicación* ϕ $\big(V_T(\phi) = H\big)$*.*
  - ***Esperanza Matemática bajo*** $\mathbb{Q}$***:*** *El monto*

$$\pi_t(H) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,T) \cdot H \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right]$$

  sería el valor al tiempo t *del flujo* H *para cualquier medida martingala* $\mathbb{Q}$*.*

Se invita al lector a revisar Björk (2020) así como Brigo & Mercurio (2006) para ahondar en el tema de la valoración bajo la medida martingala de riesgo neutral y sus aplicaciones.

2.1.3. Bonos Cero Cupón y Cuponados

Definición 7 (Bono Cero Cupón)**.** *Un bono cero cupón, con* $T-$*vencimiento, es un contrato que garantiza al poseedor el pago de 1 unidad de dinero en el tiempo* T*, sin pagos intermedios. El precio de mercado y el valor de este contrato, en el tiempo* $t < T$*, se denotan* $P^*(t,T)$ *y* $P(t,T)$*, respectivamente.* $P^*(T,T) = P(T,T) = 1$*, para todo* T*.*

Aquí es importante distinguir entre el precio de mercado $P^*(t,T)$ y el valor $P(t,T)$ del contrato del cero cupón, pues no son lo mismo debido a la existencia de impuestos sobre intereses. Si se compra un bono cero cupón a un precio $P^*(t,T)$ entonces en el momento del vencimiento se deben cancelar impuestos sobre el descuento recibido, es decir, se paga un monto igual a $\theta \cdot \big(1 - P^*(t,T)\big)$, ya que esa es la ganancia bruta generada por el cero cupón. En otras palabras, lo que se va a recibir al final del periodo no es una unidad de dinero, sino que se va a obtener el monto de $1 - \theta \cdot \big(1 - P^*(t,T)\big)$.

De este modo, para conocer el valor real de este cero cupón, se debe implementar el Teorema Fundamental de la Valoración, lo que indicaría un *"precio neto"* de un bono cero cupón. Para lograr esto se confecciona una estrategia de replicación.

Teorema 2 (Valoración Vía Estrategia de Replicación)**.** *El valor en el momento t de un cero cupón con $T-$vencimiento, precio de mercado $P^*(t,T)$ y porcentaje de impuestos θ, está dado por*

$$P(t,T) = \frac{P^*(t,T)}{\theta \cdot P^*(t,T) + (1-\theta)}, \tag{3}$$

el cual cumple que $P^*(t,T) \leq P(t,T)$, dándose la igualdad si y solo si $\theta = 0$ % o $T = t$.

Demostración. Se debe replicar el flujo final de un cero cupón en el momento T a partir de una estrategia de inversión. Como este pago final es una unidad de dinero, considere comprar $\phi_t = \frac{P(t,T)}{P^*(t,T)} = \frac{1}{\theta \cdot P^*(t,T)+(1-\theta)}$ bonos cero cupón en el mercado, al precio $P^*(t,T)$ en el momento T. Este paquete de bonos cero cupón con $T-$vencimiento tienen en t un valor de $\pi_t = V_t(\boldsymbol{\phi}) = \frac{P(t,T)}{P^*(t,T)} \cdot P^*(t,T) = P(t,T)$, y en el momento T se recibe $1-\theta \cdot \big(1-P^*(t,T)\big)$ por cada cero cupón comprado, es decir, el pago final será:

$$V_T(\boldsymbol{\phi}) = \phi_t \cdot \big(1-\theta \cdot \big(1-P^*(t,T)\big)\big) = \frac{1}{\theta \cdot P^*(t,T) + (1-\theta)} \cdot \big(1-\theta \cdot \big(1-P^*(t,T)\big)\big) = 1.$$

En otras palabras, esta estrategia de inversión replica el flujo de 1 y por el TFV el valor del cero cupón con vencimiento en T es $\pi_t = P(t,T)$. Note que $\theta \cdot P^*(t,T) + (1-\theta)$ es un promedio ponderado entre 1 y $P^*(t,T)$, entonces su valor debe cumplir la condición de que $P^*(t,T) \leq \theta \cdot P^*(t,T) + (1-\theta) \leq 1$, lo que implica que $1 \leq \frac{1}{\theta \cdot P^*(t,T)+(1-\theta)}$, y por ende, $P^*(t,T) \leq \frac{P^*(t,T)}{\theta \cdot P^*(t,T)+(1-\theta)} = P(t,T)$. Si $T = t$ o $\theta = 0$ % es claro que se cumple la igualdad. Finalmente, si se cumple la igualdad entonces

$$P^*(t,T) = \frac{P^*(t,T)}{\theta \cdot P^*(t,T) + (1-\theta)} \implies \theta \cdot \big(P^*(t,T)-1\big) = 0 \implies \theta = 0 \text{ ó } P^*(t,T) = 1,$$

siendo que $P^*(t,T) = 1$ si y solo si $T = t$ (para que no haya arbitraje). □

Utilizando el TFV, por la vía de esperanza matemática, se tiene que el valor de un cero cupón es

$$P(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,T) \cdot 1 \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right], \tag{4}$$

es decir, el valor de un bono cero cupón es el mejor estimador del factor de descuento estocástico, o dicho de otra forma, es lo que espera el mercado (bajo la medida de riesgo neutral) que sean los factores de descuento futuros. Es por ello que se utilizan los precios $P(t,T)$ para descontar los flujos futuros, es decir, $K \cdot P(t,T)$ es la cantidad de unidades de dinero que se deben tener en t para asegurarse tener K unidades de dinero en T, lo cual se consigue comprando $K \cdot \frac{P(t,T)}{P^*(t,T)}$ cero cupones al precio $P^*(t,T)$, costando en total $K \cdot \frac{P(t,T)}{P^*(t,T)} \cdot P^*(t,T) = K \cdot P(t,T)$ y entregando K unidades de dinero al vencimiento en T.

Definición 8 (Rendimiento Cero Cupón)**.** *Se denota por $R(t,T)$ al rendimiento neto de un bono cero cupón con $T-$vencimiento, el cual está dado por*

$$R(t,T) = \frac{1-P(t,T)}{P(t,T)}. \quad \left(\iff \quad P(t,T) = \frac{1}{\big(1+R(t,T)\big)}\right) \tag{5}$$

Dado que $R(t,T)$ es una tasa efectiva para el plazo $\tau(t,T)$, no se pueden comparar dos rendimientos con vencimientos distintos. Para realizar dicha comparación, es necesario poder expresar los rendimientos en la misma unidad temporal, es decir, se deben tomar los rendimientos y transformarlos a tasas equivalentes para el plazo de comparación. La siguiente definición da luz sobre qué se entiende por *"equivalente"*.

Definición 9 (Tasas Equivalentes)**.** *Dos inversiones se dicen ser **"equivalentes"** si toda cantidad dada de principal, invertido en cada uno de los esquemas de inversión, durante el mismo plazo, produce el mismo valor acumulado. Las tasas que pagan estas inversiones equivalentes se llaman **"tasas equivalentes"**.*

A partir de 9 se pueden definir las tasas equivalentes que podrán ser comparables entre sí, donde su gráfica es de suma utilidad.

Definición 10 (Tasas Equivalentes & Curva Cero Cupón)**.** *Dado que $P(t,T) = \frac{1}{1+R(t,T)}$,*

- *Se denota por $\rho(t,T)$ a la tasa de interés spot compuesta anualmente que es equivalente a $R(t,T)$, en el tiempo t hasta un momento T, i.e.,*

$$\rho(t,T) := (1+R(t,T))^{\frac{1}{\tau(t,T)}} - 1. \quad \left(\iff \quad P(t,T) = \frac{1}{\big(1+\rho(t,T)\big)^{\tau(t,T)}}\right) \tag{6}$$

- *Se denota por $\delta(t,T)$ a la tasa de interés spot compuesta continuamente que es equivalente a $R(t,T)$, en el tiempo t hasta un momento T, i.e.,*

$$\delta(t,T) := \ln\big(1+\rho(t,T)\big) = \frac{\ln\big(1+R(t,T)\big)}{\tau(t,T)}. \quad \left(\iff \quad P(t,T) = e^{-\tau(t,T)\delta(t,T)}\right) \tag{7}$$

*A las curvas generadas por las funciones $\rho(t,\cdot) : [t,\infty[\to \mathbb{R}^+$ y $\delta(t,\cdot) : [t,\infty[\to \mathbb{R}^+$ se les llama **"Curva Cero Cupón"**. La curva generada por la función $P(t,\cdot) =: [t,\infty[\to \mathbb{R}^+$ se le llama **"Curva Bono Cero Cupón"** (factores de descuento).*[4][5]

[4] Se hará referencia a la curva $\rho(t,\cdot) : [t,\infty[\to \mathbb{R}^+$ cuando se hable de la curva cero cupón.

[5] Para fechas del 31 del mes no se pueden calcular las tasas $\delta(t,T)$ y $\rho(t,T)$ para T suficientemente pequeño pues $\tau(t,T) = 0$. Como se restringe para plazos mayores a 1 día entonces las tasas sí existen independientemente del día del mes.

A partir de los resultados y definiciones anteriores se puede obtener una relación entre los valores de los títulos cuponados y los bonos cero cupón (en ausencia de arbitraje), lo cual es de gran utilidad a la hora de la construcción de la curva cero cupón.

Definición 11 (Bono Cuponado Tasa Fija)**.** *Se llama **Bono Cuponado Tasa Fija** con tasa facial (nominal anual) efectiva i^*, valor facial VF, tiempos de pagos $\mathscr{T} = \{T_0, \ldots, T_n\}$ y vencimiento $T = T_n$, a cualquier contrato que garantice n cupones, durante un plazo T, por un monto de $i^* \cdot \tau(T_{k-1}, T_k) \cdot VF$ cada cupón[6] en el momento T_k, y que devuelve el valor facial en el último pago. Se denota por $\boldsymbol{PF(t; \mathscr{T}; i^*)}$ al valor de un título cuponado tasa fija con valor facial igual a una unidad de dinero, en el momento t con $T_0 \leq t < T_1$.*

Del mismo modo que con el bono cero cupón, el precio sucio (bruto) del mercado no coincide con el valor del bono cuponado, en vista de que el precio sucio considera un pago de cupón de $i^* \cdot \tau(T_{k-1}, T_k)$, mientras que el cupón que realmente recibe el inversionista es $i = i^* \cdot \tau(T_{k-1}, T_k) \cdot (1 - \theta)$ pues $i^* \cdot \tau(T_{k-1}, T_k) \cdot \theta$ es el monto pagado en impuestos.

Teorema 3 (Valoración Vía Esperanza Matemática)**.** *El valor (precio sucio neto) de un bono cuponado tasa fija, con tasa facial (nominal) i^*, tiempos de pagos $\mathscr{T} = \{T_0, \ldots, T_n\}$ y valor facial igual a 1 unidad, está dado por*

$$PF\big(t; \mathscr{T}; i^*\big) = \sum_{k=1}^{n} i \cdot \tau(T_{k-1}, T_k) \cdot P\left(t, T_k\right) + P(t, T), \tag{8}$$

donde $i = i^* \cdot (1 - \theta)$ es la tasa facial neta (después de impuestos).

Demostración. Si cada tasa facial neto i se reinvierte hasta el vencimiento, a las tasas estocásticas de mercado, entonces todos los pagos suman un único flujo (en T) por un monto de $H = \sum_{k=1}^{n} i \cdot \tau(T_{k-1}, T_k) \cdot A\left(T_k, T\right) + 1$. Por el TFV se tiene

$$\begin{aligned}
PF\big(t; \mathscr{T}; i^*\big) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,T) \left(\sum_{k=1}^{n} i \cdot \tau(T_{k-1}, T_k) \cdot A\left(T_k, T\right) + 1 \right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sum_{k=1}^{n} i \cdot \tau(T_{k-1}, T_k) \cdot D\left(t, T_k\right) + D(t,T) \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} i \cdot \tau(T_{k-1}, T_k) \cdot \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D\left(t, T_k\right) \mid \mathcal{F}_t \right]}_{= P(t,T_k)} + \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,T) \mid \mathcal{F}_t \right]}_{= P(t,T)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} i \cdot \tau(T_{k-1}, T_k) \cdot P\left(t, T_k\right) + P(t,T).
\end{aligned}$$

[6]Como i^* es una tasa facial nominal anual entonces $i^* \cdot \tau(T_{k-1}, T_k)$ es la tasa facial efectiva para el plazo de intereses devengados iniciado en T_{k-1} y finalizado en T_k. Por ejemplo, si el título cuponado tiene periodicidad 2 (paga cada 6 meses), entonces $\tau(T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{2}$ y el cupón efectivo es $\frac{i^*}{2}$.

donde se utilizó que

$$D(t,T) = e^{-(1-\theta)\int_t^T r_u d_u \tau(0,u)} = e^{-(1-\theta)\left(\int_t^{T_k} r_u d_u \tau(0,u) + \int_{T_k}^T r_u d_u \tau(0,u)\right)}$$
$$= e^{-(1-\theta)\int_t^{T_k} r_u d_u \tau(0,u)} \cdot e^{-(1-\theta)\int_{T_k}^T r_u d_u \tau(0,u)} = D(t,T_k) \cdot D(T_k,T) = \frac{D\,(t,T_k)}{A\,(T_k,T)}.$$

□

Queda claro que si un título cuponado tasa fija no tiene un valor igual a su contraparte de bonos cero cupón, entonces hay posibilidad de arbitraje. Este concepto es fundamental para la construcción de la curva cero cupón en vista de que no existen bonos cero cupón para todos los vencimientos, por lo que es necesario extraer la información que brindan los títulos cuponados tasa fija para alimentar el algoritmo y obtener los valores de los bonos cero cupón implícitos en sus precios. Es importante resaltar el hecho de que es debido a esta equivalencia, entre el valor de un título cuponado tasa fija y su contraparte de bonos cero cupón (portafolio que replica los flujos), que no es correcto utilizar la Tasa Interna de Retorno (TIR) en la construcción de la curva cero cupón.

Definición 12 (Tasa Interna de Retorno)**.** *Se denota a la* **Tasa Interna de Retorno** *de un título cuponado tasa fija con valor P, pagos en $\mathscr{T} = \{T_0, \ldots, T_n\}$, tasa facial (nominal) i^* y vencimiento $T = T_n$, en el momento t con $T_0 \leq t < T_1$, por* $\textbf{TIR}\big(\boldsymbol{t}; \mathscr{T}; \boldsymbol{i^*}; \boldsymbol{P}\big)$*. Dicha tasa viene dada en forma implícita por:*

$$P = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{i \cdot \tau(T_{k-1}, T_k)}{\big(1 + \text{TIR}\big(t; \mathscr{T}; i^*; P\big)^{\tau(t,T_i)}} \right) + \frac{1}{\big(1 + \text{TIR}\big(t; \mathscr{T}; i^*; P\big)^{\tau(t,T)}}. \tag{9}$$

Es importante notar que en la definición de la TIR se da por conocido (como *"input"*) el valor del instrumento. El principal problema es que no es correcto usarlo de manera inversa, es decir, utilizar la TIR para deducir el valor de un título pues podría ser de arbitraje. Por ejemplo, si los rendimientos (cero cupón) de mercado son $R\left(0, \frac{1}{3}\right) = 3\,\%$, $R\left(0, \frac{2}{3}\right) = 5\,\%$, $R\left(0, \frac{3}{3}\right) = R(0,1) = 6\,\%$, entonces el valor de no-arbitraje para un título cuponado tasa fija, con tasa facial (nominal) $9\,\%$ (el cupón sería $\frac{9\,\%}{3} = 3\,\%$), pagos en $\mathscr{T} = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ y con tasa impositiva $\theta = 0\,\%$, es por (8),

$$PF(0; \mathscr{T}; 9\,\%) = \left(\frac{3\,\%}{1 + 3\,\%} + \frac{3\,\%}{1 + 5\,\%} + \frac{3\,\%}{1 + 6\,\%} \right) + \frac{1}{1 + 6\,\%} = 102,94\,\%.$$

La TIR asociada a este título sería $6,06\,\%$ pues

$$\left(\frac{3\,\%}{(1 + 6,06\,\%)^{\frac{1}{3}}} + \frac{3\,\%}{(1 + 6,06\,\%)^{\frac{2}{3}}} + \frac{3\,\%}{(1 + 6,06\,\%)^{\frac{3}{3}}} \right) + \frac{1}{(1 + 6,06\,\%)^{\frac{3}{3}}} = 102,94\,\%.$$

Por su parte, la TIR de un bono cero cupón es igual a su rendimiento, en otras palabras, $\text{TIR}(0;\{1\},0\,\%) = R(0,1) = 6\,\%$. Si se desea obtener una única TIR a un año, con esta información, una forma sería el promediar las TIR de la cero cupón y del título cuponado tasa fija, siendo esta tasa $\overline{\text{TIR}} = \frac{6\,\%+6{,}06\,\%}{2} = 6{,}03\,\%$. Empero, si se usa esta tasa para valorar el cero cupón y el título cuponado se obtienen valores de arbitraje pues

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+6{,}03\,\%} = 94{,}31\,\% \neq 94{,}34\,\% = \dfrac{1}{1+6\,\%} = P(0,1) \\ \dfrac{3\,\%}{(1+6{,}03\,\%)^{\frac{1}{3}}} + \dfrac{3\,\%}{(1+6{,}03\,\%)^{\frac{2}{3}}} + \dfrac{1+3\,\%}{(1+6{,}03\,\%)^{\frac{3}{3}}} = 102{,}97\,\% \neq 102{,}94\,\% = PF(0;\mathscr{T};3\,\%) \end{cases}$$

La Tasa TIR no es única como función del vencimiento, por lo que es incoherente generar una única curva TIR con títulos con instantes de pago (periodicidades) distintos o tasas faciales diferentes. Es por ello que no es adecuado utilizar las tasas TIR para construir una curva cero cupón.

2.1.4. Curva Par

Definición 13 (Tasa Par)**.** *Se denota por $C(t;\mathscr{T})$ a la* **Tasa Par** *de un título cuponado tasa fija con pagos en $\mathscr{T} = \{T_0,\ldots,T_n\}$, y vencimiento $T = T_n$, en el momento t con $T_0 \leq t < T_1$. La tasa par es el cupón nominal que paga un título cuponado tasa fija con valor par (valor igual a 1).*

A partir de (8), la tasa par $C(t;\mathscr{T})$ está dada implícitamente por

$$\sum_{k=1}^{n} C(t;\mathscr{T}) \cdot \tau(T_{k-1},T_k) \cdot P(t,T_k) + P(t,T) = 1.$$

Despejando la tasa par se obtiene que (explícitamente),

$$C(t;\mathscr{T}) = \frac{1-P(t,T)}{\sum_{k=1}^{n} \tau(T_{k-1},T_k) \cdot P(t,T_k)} \tag{10}$$

La tasa interna de retorno de un bono y la tasa par mantienen una relación importante entre ellas. Si un título cuponado tasa fija, con tiempos de pago $\mathscr{T} = \{T_0,\ldots,T_n\}$ y vencimiento $T = T_n$, está siendo transado a la par (i.e. $PF(t;\mathscr{T};i^*) = 1$ y $C(t;\mathscr{T}) = i$), entonces se cumple que $C(t;\mathscr{T}) = \text{TIR}(t;\mathscr{T};i^*;1)$. Por otra parte, si su tasa facial neta es mayor que la tasa par $(C(t;\mathscr{T}) < i)$, entonces $C(t;\mathscr{T}) > \text{TIR}(t;\mathscr{T};i^*;P)$; mientras que si, por el contrario, $C(t;\mathscr{T}) > i$ entonces $C(t;\mathscr{T}) < \text{TIR}(t;\mathscr{T};i^*;P)$, donde $P := PF(t;\mathscr{T};i^*)$.

Lo estándar es utilizar una periodicidad semestral, es decir, $\tau(T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{2}$. En ese caso, se pueden obtener tasas par para vencimientos múltiplos de semestres con la fórmula.

$$C_2\left(t; \frac{n}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1 - P(t,T)}{\sum_{k=1}^{n} P\left(t, \frac{k}{2}\right)}. \tag{11}$$

Por ejemplo, si el mercado presenta la siguiente curva cero cupón

T (años)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
$\rho(0,T)$ (%)	8,96	9,14	9,31	9,46	9,59

entonces se tienen las siguientes tasas par:

$$C_2\left(0; \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+9{,}14\,\%)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{(1+9{,}14\,\%)^{\frac{1}{2}}}} = 8{,}94\,\%;$$

$$C_2(0;1) = C_2\left(0; \frac{2}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+9{,}31\,\%)^{\frac{2}{2}}}}{\frac{1}{(1+9{,}14\,\%)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(1+9{,}31\,\%)^{\frac{2}{2}}}} = 9{,}1\,\%$$

$$C_2\left(0; \frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+9{,}59\,\%)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{(1+9{,}14\,\%)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(1+9{,}31\,\%)^{\frac{2}{2}}} + \frac{1}{(1+9{,}59\,\%)^{\frac{3}{2}}}} = 9{,}36\,\%$$

Para calcular la tasa par, con periodicidad semestral, para cualquier vencimiento T, y no solo para múltiplos de semestres, se utiliza (10) para las fechas de pago dadas por $\mathcal{T} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{n-1}{2}, T\right\}$, donde $\frac{n-1}{2} < T < \frac{n}{2}$, es decir, $\tau(T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{2}$ si $k < n$ y

$$C_2\left(t; T\right) := 2 \cdot \frac{1 - P(t,T)}{\sum_{k=1}^{n-1} P\left(t, \frac{k}{2}\right) + 2 \cdot \tau\left(\frac{n-1}{2}, T\right) \cdot P\left(t, T\right)}. \tag{12}$$

Al continuar con el ejemplo, a partir de la fórmula (12) se tiene que

$$C_2\left(0; \frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+8{,}96\,\%)^{\frac{1}{4}}}}{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+8{,}96\,\%)^{\frac{1}{4}}}} = 8{,}67\,\%;$$

$$C_2\left(0; \frac{5}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+9{,}46\,\%)^{\frac{5}{4}}}}{\frac{1}{(1+9{,}14\,\%)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(1+9{,}31\,\%)^{\frac{2}{2}}} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+9{,}46\,\%)^{\frac{5}{4}}}} = 9{,}22\,\%.$$

Definición 14 (Curva Par)**.** *Se llama **"Curva Par"** al gráfico de las tasas par, con periodicidad semestral, para distintos plazos. Se utiliza la función* $T \to C_2(t;T)$.

2.1.5. Contratos Forward y Tasas de Interés Forward

Al establecer la forma de estimar el valor de los bonos cero cupón y los títulos cuponados tasa fija, ahora se pueden valorar instrumentos financieros más complejos, tales como contratos forward sobre tasas de interés y sobre tipo de cambio, de los cuales se puede extraer información de mercado importante, así como indicadores relevantes.

Definición 15 (Contrato Forward)**.** *Un contrato forward es un acuerdo entre dos partes para comprar o vender un activo a un precio fijado y en una fecha determinada.*

Un contrato forward de tasas de interés es un contrato forward en donde se intercambia el rendimiento (cero cupón) futuro desconocido $R(S,T)$ por un monto fijo K.

- En el tiempo t se firma el contrato.
- En el tiempo S, con $S > t$, se determina la tasa variable a recibir $R(S,T)$.
- En el tiempo T, con $T > S$, se recibe el interés $R(S,T)$ y se paga interés fijo K.

Teorema 4 (Valor del Contrato Forward de Tasas de Interés)**.** *El valor de un contrato forward de tasas de interés, en el momento t, donde se recibe la tasa variable $R(S,T)$ y se paga la tasa fija K, respectivamente, es*

$$F_P\big(t;S,T,R(S,T),K\big) = P(t,S) - (1+K)\cdot P(t,T). \tag{13}$$

Demostración. El flujo que se realiza en el instante T es $H = (R(S,T) - K)$. Utilizando que $D(t,T) = D(t,S)\cdot D(S,T)$, junto a la propiedad de la torre[7] y (4), se obtiene que

$$\begin{aligned}
F_P\big(t;S,T,L(S,T),K\big) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,T)\cdot(R(S,T)-K) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,T)\cdot\big(1+R(S,T)\big) - D(t,T)\cdot(1+K) \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,S)\cdot D(S,T)\cdot\big(1+R(S,T)\big) \;\middle|\; \mathcal{F}_S\right] \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right] - (1+K)\cdot\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,S)\cdot\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(S,T) \mid \mathcal{F}_S\right]\cdot\big(1+R(S,T)\big) \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right] - (1+K)\cdot P(t,T) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,S)\cdot P(S,T)\cdot\big(1+R(S,T)\big) \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right] - (1+K)\cdot P(t,T) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,S) \mid \mathcal{F}_t\right] - (1+K)\cdot P(t,T) = P(t,S) - (1+K)\cdot P(t,T). \qquad \square
\end{aligned}$$

Cabe preguntarse ¿cuál es la (única) tasa K capaz de lograr que el contrato forward valga 0 unidades de dinero (lo que se conoce como estar *"at the money"*)?

Se define la tasa de interés forward como este único valor de K, es decir, se debe resolver para K en la expresión $F_P\big(t;S,T,R(S,T),K\big) = P(t,S) - P(t,T) - K\cdot P(t,T) = 0$.

[7] La **"Propiedad de la Torre"** establece que si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son $\sigma-$álgebras tales que $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, entonces, para cualquier variable aleatoria X se cumple que $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{A}_2\right] \mid \mathcal{A}_1\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{A}_1\right]$.

Definición 16 (Tasa de Interés Forward)**.** *La tasa de interés forward (efectiva) desde el instante S al vencimiento T (plazo), en el tiempo t, denotada por $F(t;S,T)$, se define por*

$$F(t;S,T) := \frac{P(t,S)-P(t,T)}{P(t,T)}. \quad \left(\iff \quad 1+F(t;S,T)=\frac{P(t,S)}{P(t,T)}\right) \tag{14}$$

La Tasa Forward Compuesta Anual y Compuesta Continuamente son (respectivamente)

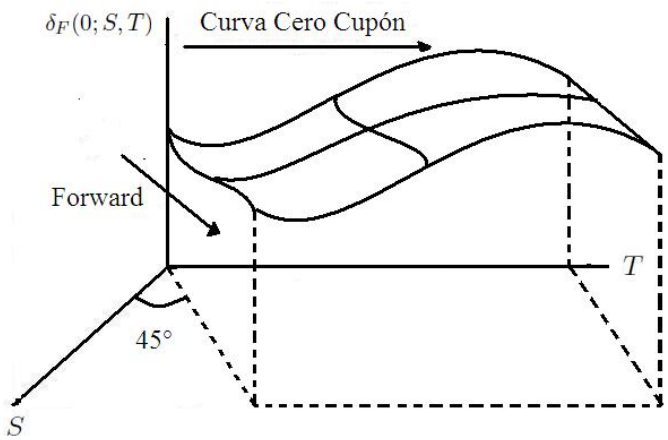
$$\rho_F(t;S,T)=\big(1+F(t;S,T)\big)^{\frac{1}{\tau(S,T)}}-1; \quad \delta_F(t;S,T)=\ln\big(1+\rho_F(t;S,T)\big)=\frac{\ln\big(1+F(t;S,T)\big)}{\tau(S,T)}.$$

Estas tasas forward son de gran relevancia para el análisis financiero pues son las que logran que se fijen las tasas a futuro de manera *"gratuita"*, esto por cuanto el contrato forward que se firma para fijarlo tiene un valor de cero unidades de dinero. Esto implica que las tasas forward contienen las expectativas del mercado sobre el valor que van a tener estas tasas en el futuro.

Definición 17 (Curva Forward y Curva Cero Cupón Forward)**.** *Se llama **"Curva Forward"** al gráfico de las tasas forward para un plazo fijo. Se utiliza la función $S \to \rho_F(t;S,T+S)$ o $S \to \delta_F(t;S,T+S)$, para un T fijo. Se llama **"Curva Cero Cupón Forward"** al gráfico de las tasas forward para un tiempo futuro fijo. Se utiliza la función $T \to \rho_F(t;S,T)$ o $T \to \delta_F(t;S,T)$, para un S fijo. A la superficie generada por las tasas de interés forward se le conoce como **"Estructura Temporal de Tasas de Interés"**.*

- **Curva Forward:** Representa las tasas que se espera que existan en el futuro para inversiones con un plazo de inversión fijo T.
- **Curva Cero Cupón Forward:** Representa la curva cero cupón que se espera que exista para un momento S en el futuro.

Figura 1: Estructura Temporal de Tasas de Interes (ETTI).



2.1.6. Tasas Forward Instantáneas

Establecido el concepto y la interpretación de las tasas forward, surge de forma natural la siguiente interrogante: ¿qué sucede cuando el intervalo de inversión es muy pequeño?

Para ello, considere la tasa forward compuesta continuamente, y note que $\tau(S,T) = T - S$ si $S \approx T$ y T no es el 31 del mes, entonces,

$$\delta_F(t;S,T) = \frac{\ln\big(1+F(t;S,T)\big)}{\tau(S,T)} = \frac{\ln\left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)}\right)}{\tau(S,T)} = \frac{\ln\left(P(t,T)\right) - \ln\left(P(t,S)\right)}{T-S} \xrightarrow[S\to T]{\text{L'Hôpital}} \frac{\partial \ln\big(P(t,T)\big)}{\partial T}.$$

Si T está en el día 31 del mes se cumple que $\tau(S,T) = 0$ si $S \approx T$, pues no se toma en cuenta para la acumulación de intereses. De este modo se tiene que

$$\frac{\partial \tau(0,T)}{\partial T} = \begin{cases} 1 & \text{si } T \neq \text{ 31 del mes} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

Como $P(t,T)$ es constante a lo largo del día 31 del mes, entonces $\frac{\partial \ln(P(t,T))}{\partial T} = 0$ para todo T dentro del 31 del mes. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 18 (Tasa de Interés Forward Instantánea)**.** *La tasa de interés forward instantánea, en el tiempo t, para el vencimiento $T > t$, se denota $f(t,T)$ y se define como*

$$f(t;T) \cdot \frac{\partial \tau(0,T)}{\partial T} := \frac{\partial \ln\big(P(t,T)\big)}{\partial T}. \quad \left(\iff \quad P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t;s) d_s \tau(0,s)}\right) \tag{15}$$

La tasa forward instantánea $f(t;T)$ es el mejor estimador de las tasas (netas) estocásticas $\big((1-\theta)\cdot r_t\big)_{t\geq 0}$ con la información del momento t y representa la cantidad de interés que se paga en el instante T para un periodo de inversión instantáneo.

Observación 1. *A partir de esta definición, junto a las ecuaciones* (7) *y* (15)*, se obtiene la siguiente relación que es útil para modelar la curva cero cupón:*

$$\delta(t,T) = \frac{1}{\tau(t,T)} \int_t^T f(t;s) d_s \tau(0,s). \tag{16}$$

El siguiente teorema es de fundamental importancia, pues presenta una restricción que debe ser cumplida a la hora de la construcción de la curva cero cupón de manera tal que no exista el arbitraje.

Teorema 5 (Condición de No-Arbitraje Forward Instantánea)**.** *Una condición necesaria para que no exista arbitraje es que las tasas forward instantáneas no sean negativas.*

Demostración. Si existe $T_0 > 0$ tal que $f(t;T_0) < 0$, entonces por continuidad de las tasas forward se sabe que existe un intervalo $]T_0 - \delta, T_0 + \delta[$ tal que $f(t;T) < 0$ para todo $T \in]T_0 - \delta, T_0 + \delta[$.

De este modo,

$$P(t,T_0) = e^{-\int_t^{T_0} f(t;s)d_s\tau(0,s)} < \overbrace{e^{-\int_t^{T_0} f(t;s)d_s\tau(0,s)} \cdot \underbrace{e^{-\int_{T_0}^{T_0+\frac{\delta}{2}} f(t;s)d_s\tau(0,s)}}_{>1}}^{e^{-\int_t^{T_0+\frac{\delta}{2}} f(t;s)d_s\tau(0,s)}} = P\left(t, T_0 + \frac{\delta}{2}\right).$$

Se venden $\frac{P\left(t,T_0+\frac{\delta}{2}\right)}{P^*\left(t,T_0+\frac{\delta}{2}\right)}$ bonos cero cupón con vencimiento en $T_0 + \frac{\delta}{2}$ al precio $P^*\left(t, T_0 + \frac{\delta}{2}\right)$, y se compran $\frac{P(t,T_0)}{P^*(t,T_0)}$ bonos cero cupón con vencimiento en T_0 al precio $P^*(t,T_0)$. En t se reciben $P\left(t, T_0 + \frac{\delta}{2}\right)$ unidades de dinero y se pagan $P(t,T_0)$ unidades de dinero, de modo que el balance final es

$$V_0 = P\left(t, T_0 + \frac{\delta}{2}\right) - P(t,T_0) > 0.$$

En T_0 se recibe una unidad de dinero por el vencimiento de los bonos comprados. Se guarda esa unidad de dinero y al momento $T_0 + \frac{\delta}{2}$ se paga esa unidad de dinero a los que compraron los bonos cero cupón que se vendieron. Se tuvo una ganancia en t de V_0, pero no hubo pérdida en el futuro, es decir, se hizo dinero de la nada por lo que hubo arbitraje. □

2.1.7. Contratos Forward de Tipo de Cambio y Tipo de Cambio Forward

Finalmente, se requiere desarrollar el concepto de contrato forward de tipo de cambio para poder generar indicadores importantes que permitan determinar oportunidades de arbitraje entre monedas, específicamente entre colones y dólares.

Definición 19 (Tipo de Cambio)**.** *Sea $E_t^{d/f} = \frac{\text{moneda } d}{\text{moneda } f}$ el tipo de cambio de la moneda doméstica "d" con la moneda foránea "f" que rige en el momento t, es decir, se pueden comprar $E_t^{d/f}$ unidades de moneda d por cada unidad de moneda f, en el instante t.*

Un contrato forward de tipo de cambio es un contrato forward en donde se intercambia el tipo de cambio variable $E_T^{d/f} = \frac{\text{moneda } d}{\text{moneda } f}$ por un tipo de cambio fijo K.

- En el tiempo t se firma el contrato donde la contraparte se compromete a pagar $E_T^{d/f} = \frac{\text{moneda } d}{\text{moneda } f}$ unidades de moneda doméstica d por cada unidad de moneda foránea f y la parte se compromete a pagar K unidades de moneda doméstica d por cada unidad de moneda foránea f.

- En el tiempo $T > t$ se determina el tipo de cambio variable $E_T^{d/f}$ a recibir. En ese momento se intercambia $E_T^{d/f}$ por el tipo de cambio fijo K, siendo el flujo de contrato forward de tipo de cambio igual a $\left(E_T^{d/f} - K\right)$.

Teorema 6 (Valor del Contrato Forward de Tipo de Cambio)**.** *Desde la óptica de la parte, el valor de un contrato forward de tipo de cambio entre dos partes es*

$$F_P\left(t; T, E_T^{d/f}, K\right) = E_t^{d/f} \cdot P^{(f)}(t,T) - K \cdot P^{(d)}(t,T), \tag{17}$$

donde $P^{(k)}(t,T)$ *es el valor de un bono cero cupón en la moneda* k*, para* $k \in \{d, f\}$*.*

Demostración. Considere las siguientes alternativas:

- **Opción Variable:** Se compran $\frac{P^{(f)}(t,T)}{P^{(f)*}(t,T)}$ bonos cero cupón con vencimiento en T del país f, al precio de mercado $P^{(f)*}(t,T)$, en unidades de dinero del país f. En el momento t se estarían pagando, en unidades de dinero del país f, un monto igual a $P^{(f)}(t,T)$, que sería equivalente a pagar $E_t^{d/f} \cdot \widetilde{P}^{(f)}(t,T)$ unidades de dinero del país d. De este modo, en el momento T, se estaría recibiendo 1 unidad de dinero del país f, con la cual se pueden comprar $E_T^{d/f}$ unidades de dinero del país d.
- **Opción Fija:** Se compran $K \cdot \frac{P^{(d)}(t,T)}{P^{(d)*}(t,T)}$ bonos cero cupón con vencimiento en T, al precio de mercado $P^{(d)*}(t,T)$, en unidades de dinero del país d. En el momento t se pagan, en unidades del país d, $K \cdot \widetilde{P}^{(d)}(t,T)$, y en el momento T, se reciben K unidades de dinero del país d.

La diferencia de flujos, en colones, entre estas opciones (opción variable menos opción fija) es, en el tiempo T, igual a $\left(E_T^{d/f} - K\right)$, mismo que el contrato forward.

Tiempo	Opción Variable	Opción Fija	
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
t	$P^{(f)}(t,T) \longleftrightarrow E_t^{d/f} \cdot P^{(f)}(t,T)$	$K \cdot P^{(d)}(t,T)$	$\longleftarrow$ Paga
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
T	$1 \longleftrightarrow E_T^{d/f}$	K	$\longleftarrow$ Recibe

$$\Downarrow$$

Flujos de la Replicación = Contrato Forward de Tipo de Cambio con Pago K

t	T
$\downarrow$	$\downarrow$
$\underbrace{\left(E_t^{d/f} \cdot P^{(f)}(t,T) - K \cdot P^{(d)}(t,T)\right)}_{= F_P\left(t;T,E_T^{d/f},K\right)}$	$\left(E_T^{d/f} - K\right)$

Como refplica el flujo, el valor del contrato forward debe ser el mismo que el del portafolio que lo replica. □

Emulando lo realizado con el contrato forward de tasas de interés, se define el tipo de cambio forward como el único valor de K capaz de lograr que el contrato forward de tipo de cambio valga 0 unidades de dinero, es decir, se debe resolver para K en la expresión

$$F_P\big(t;T,E_T^{d/f},K\big)=E_t^{d/f}\cdot P^{(f)}(t,T)-K\cdot P^{(d)}(t,T)=0.$$

Definición 20 (Tipo de Cambio Forward)**.** *El tipo de cambio forward de la moneda f, para el país d, con la información del tiempo t, para un momento futuro $T>t$, se define por*

$$E_F^{d/f}(t;T):=E_t^{d/f}\cdot\frac{P^{(f)}(t,T)}{P^{(d)}(t,T)}=E_t^{d/f}\cdot\frac{\big(1+R^{(d)}(t,T)\big)}{\big(1+R^{(f)}(t,T)\big)}, \tag{18}$$

donde $R^{(k)}(t,T)$ son las tasas efectivas cero cupón (sin default) del país $k\in\{d,f\}$. La Tasa de Variación Cambiaria Forward (Efectiva)[8] *es*

$$\Delta_{E_F}^{d/f}(t,T):=\frac{E_F^{d/f}(t;T)-E_t^{d/f}}{E_t^{d/f}},\quad\left(\iff\quad 1+\Delta_{E_F}^{d/f}(t,T)=\frac{\big(1+R^{(d)}(t,T)\big)}{\big(1+R^{(f)}(t,T)\big)}\right) \tag{19}$$

la Tasa de Variación Cambiaria Forward Compuesta Anual es

$$\rho_{\Delta_{E_F}}^{d/f}(t,T)=\big(1+\Delta_{E_F}^{d/f}(t,T)\big)^{\frac{1}{\tau(t,T)}}-1=\frac{\rho^{(d)}(t,T)-\rho^{(f)}(t,T)}{1+\rho^{(f)}(t,T)},$$

y la Tasa de Variación Cambiaria Forward Compuesta Continuamente es

$$\delta_{\Delta_{E_F}}^{d/f}(t,T)=\ln\big(1+\rho_{\Delta_{E_F}}^{d/f}(t,T)\big)=\frac{\ln\big(1+\Delta_{E_F}^{d/f}(t,T)\big)}{\tau(t,T)}.$$

Al sacar logaritmo y dividir entre $\tau(t,T)$ en (19) se obtiene que

$$\delta_{\Delta_{E_F}}^{d/f}(t,T)=\frac{\ln\big(1+R^{(d)}(t,T)\big)}{\tau(t,T)}-\frac{\ln\big(1+R^{(f)}(t,T)\big)}{\tau(t,T)}=\delta^{(d)}(t,T)-\delta^{(f)}(t,T), \tag{20}$$

es decir, la tasa de variación cambiaria esperada (forward compuesta continuamente) es la diferencia de las tasas (compuestas continuamente) entre el país d y el país f.

[8] Cuando la tasa de variación cambiaria forward es positiva se dice que la moneda foránea se encuentra con **"Forward Premium"** y cuando es negativa se dice que está con **"Forward Discount"**. Para la moneda doméstica los signos se invierten.

Si el país d paga una tasa de interés superior a la que paga el país f $\left(\delta^{(d)}(t,T) > \delta^{(f)}(t,T)\right)$, entonces la tasa de variación cambiaria forward es positiva, lo que indicaría que el tipo de cambio forward en T es mayor que el tipo de cambio vigente en t, lo que indica que el mercado estaría apostando a una depreciación de la moneda d (*"Forward Discount"*). A la ecuación (20) se le conoce como la **"Paridad Cubierta de Tasas de Interés" (CIP)**.

Con este tipo de cambio forward se consigue fijar a futuro, de manera *"gratuita"*, el tipo de cambio, esto por cuanto el contrato forward que se firma para fijarlo tiene un valor de cero unidades de dinero. Esto implica que el tipo de cambio forward contiene, implícitamente, las expectativas del mercado sobre el valor que van a tener ese tipo de cambio.

Definición 21 (Curvas de Expectativas de Cambiarias)**.** *Se llama **"Curva de Tipo de Cambio Esperado"** al gráfico generado por los tipos de cambio forward. Se utiliza la función $T \to E_F(t;T)$. Se llama **"Curva de Variación Cambiaria Esperada"** al gráfico de las tasas de variación cambiaria forward. Se utiliza la función $T \to \rho^{d/f}_{\Delta_{E_F}}(t;T)$.*

2.1.8. Premio Cambiario

Si $E_T^{d/f}$ es el tipo de cambio en el momento T, entonces la depreciación o apreciación observada de la moneda del país d con respecto a la moneda del país f estaría dada por $\Delta_E^{d/f}(t,T) := \frac{E_T^{d/f} - E_t^{d/f}}{E_t^{d/f}}$. Cuando no se puede hacer uso de los contratos forward para fijar el tipo de cambio futuro, entonces, bajo las expectativas racionales (bajo la medida $\mathbb{P}$) se debería cumplir que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\delta^{d/f}_{\Delta_E}(t,T)\right] = \delta^{(d)}(t,T) - \delta^{(f)}(t,T), \tag{21}$$

donde $\delta^{d/f}_{\Delta_E}(t,T) := \frac{\ln\left(1+\Delta_E^{d/f}(t,T)\right)}{\tau(t,T)}$ es la tasa de variación cambiaria observada compuesta continuamente. A la relación dada por (21) se le conoce como la **"Paridad Descubierta de Tasas de Interés" (UIP)**.

Eugene Fama (1984) publicó su influyente estudio llamado *"Forward and Spot Exchange Rates"*, el cual formalizó el concepto del **"Forward Premium Puzzle"** y popularizó este concepto al identificar estas inconsistencias. Este trabajo mostró que las monedas con un forward premium $\left(\Delta^{d/f}_{E_F}(t,T) < 0\right)$ no se aprecian como lo predice la teoría, sino que tienden a depreciarse $\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\delta^{d/f}_{\Delta_E}(t,T)\right] > 0\right)$, lo que contradice la UIP.

Empíricamente, la *regresión de Fama* dada por

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\delta^{d/f}_{\Delta_E}(t,T)\right] \;=\; \alpha \;+\; \beta \cdot \left(\delta^{(d)}(t,T) - \delta^{(f)}(t,T)\right) \;+\; \varepsilon_{t+1}, \qquad H_0:\; \alpha = 0,\; \beta = 1,$$

debió cumplir la hipótesis nula de $\beta = 1$ para satisfacer la UIP, sin embargo, en su artículo se demostró que típicamente $\widehat{\beta} < 1$ y a menudo $\widehat{\beta} < 0$. Cuando existe un forward premium (moneda doméstica más alta), en promedio la moneda doméstica no se deprecia lo suficiente e incluso tiende a apreciarse. Este sesgo es el *"forward premium puzzle"*.

Para incluir el factor faltante, se introduce el concepto de **"Premio Cambiario"**, una prima de riesgo que genera la depreciación de una moneda con forward premium.

Más específicamente,

$$\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\delta^{d/f}_{\Delta_E}(t,T)\right]}_{\text{variación esperada}} + \underbrace{\lambda(t,T)}_{\text{premio cambiario}} = \delta^{(d)}(t,T) - \delta^{(f)}(t,T) \tag{22}$$

Si se cuenta con una estimación de la tasa de variación esperada, así como las tasas cero cupón entre países, es posible estimar el Premio Cambiario despejando $\Lambda(t,T)$ de (22).

Definición 22 (Curva de Premio Cambiario)**.** *Se llama **"Curva de Premio Cambiario"** al gráfico del premio cambiario para distintos plazos. Se utiliza la función $T \to \Lambda(t;T)$.*

2.2. Modelación de la Curva: Nelson-Siegel & Svensson

"Estabilidad" es la condición en la que una ligera perturbación no genera una respuesta en el sistema demasiado intensa. Nelson y Siegel intentaron encontrar una justificación teórica para la forma de la curva cero cupón, donde se logre estabilidad. Finalmente, ellos propusieron que la dinámica de las tasas forward instantáneas sigue una ecuación diferencial lineal de segundo orden dada por:

$$\eta_1^2 y'' + \eta_1 y' + y = \beta_0,$$

donde β_0 es el parámetro de estabilidad y convergencia en el largo plazo, lo que permite una "extrapolación" robusta, mientras que η_1 es un factor de reescalamiento temporal. Se busca solucionar para $y = f(t,T)$. La ecuación característica es $\eta_1^2 r^2 + \eta_1 r + 1 = 0$ que tiene como solución única (repetida) $r = -\frac{1}{\eta_1}$. La condición de estabilidad indica que la solución es estable si $r < 0$, por lo que una condición para este modelo es que $\eta_1 > 0$.

La solución de esta ecuación diferencial es

$$f(t,T;\boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}} + \beta_2 \left(\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}\right) e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}, \tag{23}$$

donde $f(t,T;\boldsymbol{\beta})$ es la tasa forward instantánea y los parámetros serían $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \eta_1)$.

Utilizando la relación $\delta(t,T;\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{\tau(t,T)}\int_t^T f(t,s)d_s\tau(t,s)$, obtenemos que

$$\delta(t,T;\boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1\left(\frac{1-e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}\right) + \beta_2\left(\frac{1-e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}} - e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}\right), \tag{24}$$

donde $\delta(t,T;\boldsymbol{\beta})$ sería la tasa cero cupón compuesta continuamente.

Los parámetros de esta curva tienen una interpretación muy clara y sencilla:

- β_0 es vista como la tasa cero cupón de largo plazo, ya que

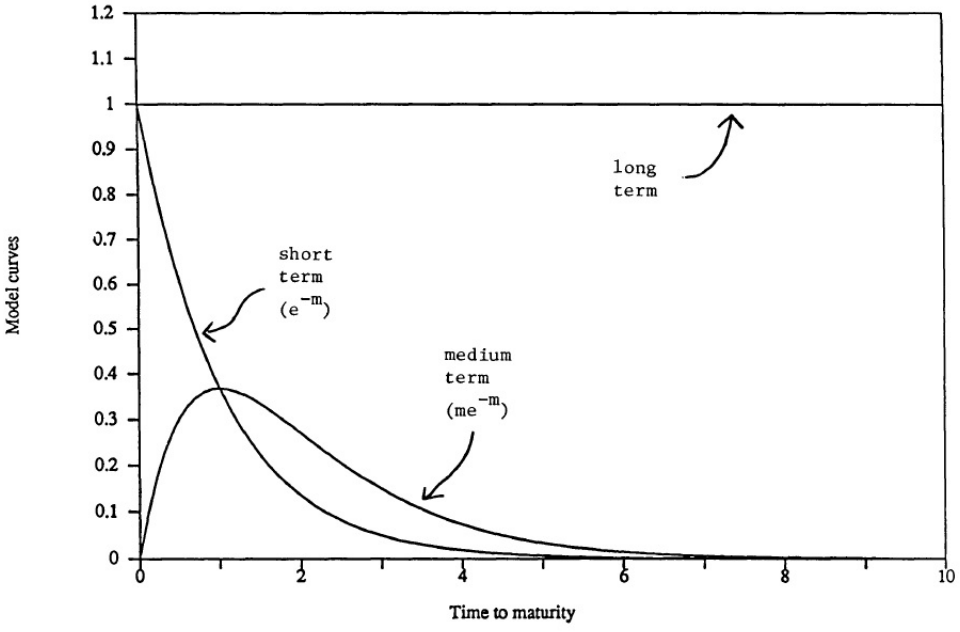
$$\lim_{T\to\infty}\delta(t,T;\boldsymbol{\beta}) = \beta_0.$$

- β_1 es considerado el "spread" entre el corto y el largo plazo, puesto que

$$\delta(t,t;\boldsymbol{\beta}) = \lim_{T\to t}\delta(t,T;\boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1,$$

  y $\delta(t,t;\boldsymbol{\beta})$ es la tasa corta, i.e., $\lim_{T\to\infty}\delta(t,T;\boldsymbol{\beta}) - \delta(t,t;\boldsymbol{\beta}) = -\beta_1$.
- β_2 es el parámetro de curvatura, que le permite al modelo tener una joroba.
- η_1 es un parámetro de reescalamiento y es ahí donde se da la "joroba" de la función.

Gráfico 1: Efectos de los Parámetros en la Curva Cero Cupón.



Fuente: Tomando de Nelson & Siegel (1987).

Como la función de Nelson-Siegel no permite generar todas las formas de la curva cero cupón observadas en el mercado, como por ejemplo la forma de “U” o con dos “jorobas”, Svensson generalizó esta función agregándole un parámetro extra.

La tasa forward instantánea para este modelo es

$$f(t,T;\boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}} + \beta_2 \left(\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}\right) e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}} + \beta_3 \left(\frac{\tau(t,T)}{\eta_2}\right) e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_2}}. \tag{25}$$

La función de la curva cero cupón para el modelo de Svensson sería

$$\delta(t,T;\boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1-e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}\right) + \beta_2 \left(\frac{1-e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}} - e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}\right) + \beta_3 \left(\frac{1-e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_2}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_2}} - e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_2}}\right),$$

donde β_3 y η_2 tienen interpretaciones similares a las de β_2 y η_1.

El vector de parámetros será $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \eta_1, \eta_2)$.

Para mercados poco bursátiles, como el mercado costarricense, Cairns (2004) sugiere en su libro una variación al modelo Svensson para evitar que las jorobas η_1 y η_2 se encuentren muy cercanas una de la otra. Para ello sugiere el cambio $\beta_2 = \bar{\beta}_2 + \frac{\eta_1 \bar{\beta}_3}{\eta_2^{-1} - \eta_1^{-1}}$ y $\beta_3 = -\frac{\eta_1 \bar{\beta}_3}{\eta_2^{-1} - \eta_1^{-1}}$, por lo que la curva cero cupón está dada por

$$\begin{aligned}\delta(t,T;\boldsymbol{\beta}) = \beta_0 &+ \beta_1 \left(\frac{1-e^{\frac{-\tau(t,T)}{\eta_1}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}\right) + \bar{\beta}_2 \left(\frac{1-e^{\frac{-\tau(t,T)}{\eta_1}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}} - e^{\frac{-\tau(t,T)}{\eta_1}}\right) \\ &+ \frac{\bar{\beta}_3}{\frac{1}{\eta_2} - \frac{1}{\eta_1}} \left(\eta_1 \cdot \left[\frac{1-e^{\frac{-\tau(t,T)}{\eta_1}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}} - e^{\frac{-\tau(t,T)}{\eta_1}}\right] - \eta_2 \cdot \left[\frac{1-e^{\frac{-\tau(t,T)}{\eta_2}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_2}} - e^{\frac{-\tau(t,T)}{\eta_2}}\right]\right).\end{aligned} \tag{26}$$

El vector de parámetros será $\boldsymbol{\beta} = \big(\beta_0, \beta_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3, \eta_1, \eta_2\big)$.

2.3. Algoritmos de Optimización

Los modelos metaheurísticos son técnicas de optimización donde se realizan búsquedas mediante una evaluación estratégica de la función objetivo para encontrar sus mínimos locales. Muchos de estos modelos son opciones eficientes para optimizar funciones no derivables o de naturaleza complicada, como lo es en el caso de la no-linealidad de la curva de Nelson-Siegel o la de Svensson. En general, los componentes de la optimización, tanto para la función objetivo como para los algoritmos, son los siguientes:

1. Puntos Iniciales: los puntos desde los cuales el algoritmo de optimización inicializa su proceso de búsqueda.
2. Cotas Superiores: Son los puntos límite que dictan el espacio de búsqueda. No se buscan soluciones mayores a la cota superior.
3. Cotas Inferiores: Son los puntos límite que dictan el espacio de búsqueda. No se buscan soluciones menores a la cota inferior.
4. Control: son los parámetros específicos para cada optimizador que coordinan su funcionamiento, cantidad de iteraciones, tolerancia, etc.
5. Función a optimizar: para todos los casos se aplican las dos funciones objetivo de ponderación con modelo Svensson y Nelson-Siegel.

Los métodos utilizados en este trabajo son:

Figura 2: Algoritmos de Optimización.

2.3.1. Nelder-Mead

Este método es uno de los más utilizados para resolver problemas de optimización sin restricciones. Suponga que se quiere minimizar la función $f(x)$, con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. El método de Nelder-Mead inicia con $n+1$ puntos $\{x_j\}_{j=1}^{n+1}$ y los ordena de manera tal que:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq \ldots \leq f(x_{n+1})$$

Una vez ordenados los puntos se sigue el siguiente algoritmo hasta su convergencia (ver Gao & Laxing (2012) para conocer más sobre el algoritmo):

- **Reflexión:** Se calcula el punto de reflexión x_r como $x_r = \bar{x} + \alpha(\bar{x} - x_{n+1})$, donde $0 < \alpha$ es una constante de reflexión y $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{1=1}^{n} x_i$. Se evalúa $f_r = f(x_r)$ y si $f_1 \leq f_r < f_n$, se reemplaza x_{n+1} con x_r.
- **Expansión:** Si $f_r < f_1$, se calcula el punto de expansión x_e como $x_e = \bar{x} + \beta(x_r - \bar{x})$, donde $\beta > 1$ es la constante de expansión. Se evalúa $f_e = f(x_e)$ y si $f_e < f_r$, se reemplaza x_{n+1} con x_e; en caso contrario se reemplaza x_{n+1} con x_r.
- **Contracción Exterior:** Si $f_n \leq f_r < f_{n+1}$, se calcula el punto de contracción exterior x_{ce} como $x_{ce} = \bar{x} + \gamma(x_r - \bar{x})$, donde $0 < \gamma < 1$ es la constante de contracción. Se evalúa $f_{ce} = f(x_{ce})$ y si $f_{ce} < f_r$, se reemplaza x_{n+1} con x_{ce}; en caso contrario se pasa al siguiente paso (contracción interior).
- **Contracción Interior:** Si $f_r \geq f_{n+1}$, se calcula el punto de contracción interior x_{ci} como $x_{ci} = \bar{x} + \gamma(x_r - \bar{x})$. Se evalúa $f_{ci} = f(x_{ci})$ y si $f_{ci} < f_{n+1}$, se reemplaza x_{n+1} con x_{ci}; en caso contrario se pasa al siguiente paso (contracción).
- **Contracción:** Para $2 \leq i \leq n+1$, se define $x_i = x_1 + \delta(x_i - x_1)$, con $0 < \delta < 1$.

Debido a que el método de Nelder-Mead se utiliza para resolver problemas de optimización sin restricciones, se debe aplicar un método de barrera fija. En este trabajo se usaron funciones que restringían el número de iteraciones así como la incorporación de límites, las cuales eran combinaciones lineales de los parámetros de optimización, tal que se satisface la ecuación de restricciones $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{\beta} \geq \boldsymbol{c}$.

2.3.2. Algoritmo Genético

El algoritmo se resume de la siguiente manera (ver Quirós y Trejos (2017) para conocer más sobre este algoritmo):

- **Población:** Se eligen aleatoriamente M combinaciones distintas de los parámetros en la región de dominio de estos. De esta manera se forma una matriz de dimensión $M \times N$, donde N representa la cantidad de parámetros que se deben estimar.

- **Selección Natural:** Se obtiene el costo de cada fila al evaluarla dentro de la función objetivo y se ordena de tal manera que la primera sea la de menor costo y la última la de mayor costo. La selección natural consiste en seleccionar una proporción ρ de las filas y los restantes son reemplazados con hijos de los sobrevivientes en los siguientes pasos.

- **Emparejamiento:** El emparejamiento se realiza aleatoriamente tomando en cuenta las probabilidades (27) para cada fila, de manera que entre menor sea el costo, mayor sea la probabilidad de seleccionar dicha fila i de parámetros para que se empareje.

$$p_i = \frac{\lfloor \rho M \rfloor - i + 1}{\sum_{m=1}^{\lfloor M \rfloor} m} \tag{27}$$

- **Cruce:** Con las probabilidades del paso anterior, se procede a seleccionar un vector madre $(s_1^{ma}, s_2^{ma}, ..., s_N^{ma})$ y un vector padre $(s_1^{pa}, s_2^{pa}, ..., s_N^{pa})$ para generar uno o más hijos de la siguiente manera: Se selecciona al azar uno de los N parámetros, es decir se elige $k = \lfloor uN \rfloor + 1$, donde $u \sim U(0,1)$. Seguidamente se crea la variable o parámetro k de los hijos:

$$s_k^{h_1} = s_k^{ma} - \alpha(s_k^{ma} - s_k^{pa})$$
$$s_k^{h_2} = s_k^{pa} - \alpha(s_k^{ma} - s_k^{pa})$$

  donde $\alpha \sim U(0,1)$. Se termina de crear a los hijos intercambiando las variables o parámetros que se ubican a la derecha de k, con la excepción de que si $k = N$ se intercambian todas las variables a la izquierda. Es decir:

$$\text{hijo}_1 = (s_1^{ma}, ..., s_{k-1}^{ma}, s_k^{h1}, s_{k+1}^{pa}, ...s_N^{pa})$$

$$\text{hijo}_2 = (s_1^{pa}, ..., s_{k-1}^{pa}, s_k^{h2}, s_{k+1}^{ma}, ...s_N^{ma})$$

- **Mutación:** Se altera un porcentaje de las variables de la descendencia de manera aleatoria para evitar la convergencia a mínimos locales y favorecer la exploración de otras regiones del espacio de búsqueda de las variables. No se muta la primer fila, que es la mejor solución hasta el momento, de modo que si μ es la tasa de mutación, entonces el número de variables a mutar es $\mu(M-1)N$. Dichas variables se reemplazan por un número aleatorio dentro del dominio de cada una. Finalmente se repiten los pasos anteriores hasta que se satisfaga el criterio de convergencia.

2.3.3. Sobrecalentamiento Simulado (Simulated Annealing)

Método inspirado en el objetivo de llevar un material a un estado de energía mínima. El algoritmo fue originalmente desarrollado para la optimización de funciones definidas en un dominio discreto. Más información se puede encontrar en Lee & El-Sharkawi (2008). El algoritmo como tal lleva un proceso aleatorio. Dada una imagen θ_i de parámetros para la función objetivo el siguiente parámetro para el siguiente paso θ_{i+1} se encuentra en un intérvalo $N(\theta_i)$ de manera aleatoria. La permanencia de este nuevo vector de parámetros depende de una decisión dada por la siguiente probabilidad

$$P(\theta_i, \theta_{i+1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\theta_{i+1}) \leq f(\theta_i) \\ \\ e^{\frac{f(\theta_i)-f(\theta_{i+1})}{T_k}} & \text{si no} \end{cases}.$$

La incorporación de esta decisión separa el algoritmo en dos procesos consecutivos. Para temperaturas T_k pequeñas el algoritmo pretende realizar una *exploración* de los intervalos $N(\theta_i)$ ya que la probabilidad de actualizar el θ_i es alta aun alejandose del mínimo, mientras que para T_k altos el proceso es de *ascenso* ya que la probabilidad de alejarse del mínimo se empieza a tornar muy pequeña.

2.3.4. Optimización por Enjambre de Partículas (PSO)

Método que incializa con partículas (nodos) colocados aleatoriamente en el espacio de búsqueda que se evalúan en la función y sus resultados influencian sus movimientos futuros para, en conjunto, obtener mínimos locales en cada iteración. Se utiliza $-0{,}1832$ de inercia, $0{,}5287$ de parámetro cognitivo y $3{,}1913$ de influencia social, esto en línea con la recomendación de Hvass (2010). Se utilizó un máximo de 1000 iteraciones con 15 partículas para el modelo Nelson-Siegel y 20 para el Svensson modificado.

3. Construcción de la Curva

La gran dificultad que posee construir la cero cupón bajo los modelos de Nelson-Siegel o Svensson radica en que la optimización debe realizarse de manera no-lineal, lo que obliga a recurrir a algoritmos computacionales, escogiendo adecuadamente la zona de búsqueda del óptimo, considerando que existen varios óptimos, así como contemplar que se debe respetar la condición de “no-arbitraje” de la curva.

3.1. Insumos del Modelo

Para alimentar el algoritmo se utilizan las siguientes directrices:

1. **Mercado Considerado:** Los mercados financieros en Costa Rica presentan poca bursatilidad, lo que genera ciertas distorsiones en los precios de las operaciones en subasta, ya sea por información incompleta en manos de los agentes de mercado o por necesidades de colocación por parte del Gobierno o Banco Central. Al analizar las bases de datos se comprueba que frecuentemente los precios de subastas se alejan de aquellos precios de mercado secundario sin que exista una corrección posterior, es decir, se cotizan a un precio distinto al del mercado secundario pero una vez comprados se siguen cotizando al precio de mercado secundario.

Cuadro 1: Comparativo de operaciones de mercado primario y secundario de Costa Rica.

ISIN	Fecha	Mercado	# de Contrato	Días acumulados de interés	Tasa facial	Valor facial	TIR	TIR promedio semanal
CRG0000B56I5	24/2/2020	Primario	200264123	0	4,76%	¢499 800 000	7,07%	7,18%
	25/2/2020	Secundario	200264502	0	4,76%	¢500 000 000	7,22%	
	25/2/2020	Secundario	200264503	0	4,76%	¢ 11 100 000	7,22%	
	25/2/2020	Secundario	200264504	0	4,76%	¢200 000 000	7,22%	
	26/2/2020	Secundario	200264547	0	4,76%	¢288 900 000	7,22%	

Fuente: Elaboración propia con datos de la Bolsa Nacional de Valores.

Como se observa en el Cuadro 1, el 24 de febrero de 2020 se realizó una venta en mercado primario a una TIR del 7,07 %, cuando la tasa TIR promedio para ese instrumento se encontraba en 7,18 %. Aún más, ese mismo título fue colocado en mercado secundario a una TIR del 7,22 %, la cual coincide con las tasas internas de retorno con que se transaba dicho bono. Es por ello que para evitar que los precios utilizados en la generación de la curva se vean afectados por estas imperfecciones de mercado se consideran solamente las transacciones del mercado secundario.

2. **Títulos Considerados:** En vista de que se desea construir la curva cero cupón en colones con el menor riesgo posible, solamente se consideran los títulos de Gobierno y Banco Central, en particular,
   - Se consideran las emisiones *Tp, Tp0, BEM y BEM0* .
   - Se excluyen las recompras.
3. **Precios Vs Valores:** Como se demostró en el Teorema 2 y el Teorema 3, como en Costa Rica se cuenta con un impuesto del 15 % por ganancias de capital, es necesario utilizar la fórmulas correspondientes a los valores de mercado $P(t,T)$ y $PF\left(t;\mathcal{T},i^*\right)$ de no-arbitraje en lugar de los precios observados en el mercado los cuales no se encuentran neteados de impuestos.

4. **Tasas de Corto Plazo:** En el modelo teórico se considera una única tasa de interés en el mercado, pero en la vida real existe un spread entre las tasas de interés activas y las tasas de interés pasivas. Ante esto, las tasas de interés de corto plazo deben oscilar entre las tasas pasivas de menor riesgo y las tasas activas de menor riesgo, siendo candidatos para ellos los siguientes:

    - *Tasas Activas:* Aunque se podría pensar que la tasa de interés activa de menor riesgo es la Tasa de Política Monetaria (TPM), en realidad ésta última no es la tasa a la que se presta el dinero, de modo que se debe emplear la tasa de interés conocida como *"tasa de interés de facilidad permanente de crédito"*, la cual se compone de la TPM más un spread.

    - *Tasas Pasivas:* La Cámara de Bancos e Instituciones Financieras de Costa Rica provee información sobre las Tasas de Referencia Interbancarias (TRI)[9] que corresponden al promedio ponderado por captación y plazo del depósito. En vista de que las tasas a una semana es una extrapolación y no es una tasa observada, se opta por utilizar la tasa mensual observada, la cual es expresada en su forma de tasa equivalente diaria, de acuerdo con la Definición 9.

5. **Rezago de la Información:** Producto de la poca bursatilidad que se presenta en los mercados financieros costarricenses, los datos de las transacciones realizadas en un día resultan ser insuficientes para realizar una estimación robusta de la curva cero cupón, lo que plantea un problema de convergencia de los parámetros estimados hacia valor correcto. Para paliar esta situación se decidió utilizar los datos el último mes de transacciones, logrando así contar con más información sobre los valores de mercado a costa de tener influencia de valores antiguos sobre la curva cero cupón generada. Se emplea una mitigación para mermar el impacto de esta decisión de utilizar valores de semanas anteriores.

3.2. Parámetros de la Optimización

El ajuste de un modelo es un proceso que depende en gran medida de la naturaleza de la función objetivo. Es un dato conocido que la minimización de la función objetivo suele ser de una naturaleza complicada y, por lo tanto, representa un reto para la mayoría de entidades financieras que la calculan correctamente. A continuación se presenta la implementación realizada para construir la curva cero cupón para Costa Rica, tomando en consideración la posibilidad de implementar optimización adaptativa con "warm start".

[9]Tomado de página web de la Cámara de Bancos e Instituciones Financieras de Costa Rica: `http://camaradebancos.fi.cr/colones/`.

1. **Valores Iniciales:** Se utilizan como valores iniciales a los parámetros óptimos de la semana anterior, de modo que la optimización utiliza un "warm start" para evitar mínimos lejanos que pierdan razonabilidad financiera.

2. **Función Objetivo:** La función objetivo del problema de optimización está dada por:

$$V(\boldsymbol{\beta}) = \left(\boldsymbol{P} - \widehat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{\beta})\right)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\boldsymbol{P} - \widehat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{\beta})\right), \tag{28}$$

donde $\boldsymbol{P}$ corresponde al vector de valores observados y $\widehat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{\beta})$ al vector de valores teóricos. Cabe recordar que uno de los problemas que se enfrenta a la hora de construir la curva radica en el hecho de que no hay emisiones de títulos cero cupón para más de un año y en el mercado costarricense no se permiten los STRIPS[10], por lo que se cuenta con menos observaciones directas. Para obtener más información de mercado, se hace uso del Teorema 3, el cual permite capturar información sobre las tasas cero cupón implícitas a través de la relación que existe entre el valor de **no-arbitraje** de un título cuponado tasa fija y los cero cupones en los momentos de pago de cada cupón, es decir, el valor teórico del $k-$ésimo bono es

$$\widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{j=1}^{N} i^{(k)} e^{-\tau(0,T_j^{(k)})\delta\left(0,T_j^{(k)};\boldsymbol{\beta}\right)} + e^{-\tau(0,T_N^{(k)})\delta\left(0,T_N^{(k)};\boldsymbol{\beta}\right)},$$

donde la función $\delta(0,T;\boldsymbol{\beta})$ corresponde a (24) si se utiliza el modelo de Nelson-Siegel, o a (26) si por el contrario se emplea el modelo de Svensson.

La matriz $\boldsymbol{\Sigma}$, por su parte, es un ponderador que busca mejorar el ajuste evitando que transacciones muy pequeñas afecten mucho el ajuste o que los títulos tranzados en semanas anteriores vayan a estar sobreajustados mientras que los transados en la semana de cálculo pierdan calidad de ajuste. Como la matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ es diagonal, se puede expresar la función objetivo como

$$V_\alpha(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{k=1}^{n} \left(P^{(k)} - \widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\beta})\right)^2 \times Pon_k(\alpha), \tag{29}$$

donde $P^{(k)}$ es el valor observado del $k-$ésimo bono y el ponderador del error sería

$$Pon_k(\alpha) = \frac{M_k \cdot e^{\alpha \cdot v_k}}{\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot e^{\alpha \cdot v_i}}, \tag{30}$$

con M_k como el monto negociado y v_k es la semana de negociación.

[10] Acrónimo de *" Separate Trading of Registered Interest and Principal of Securities"*, proceso donde se venden los cupones de un título cuponado tasa fija como si fueran cero cupones.

3. **Restricciones:** Se deben imponer condiciones a los parámetros para evitar tener resultados irreales y respetar la condición de no-arbitraje, así como contar con un algoritmo eficiente de convergencia veloz. Las restricciones se hacen dinámicas, apalancándose en la implementación de la optimización adaptativa.

    - *Largo Plazo* (β_0)*:* Se permite una variación máxima del 2 %, tanto superior como inferiormente, con respecto al valor de la tasa de la semana anterior.
    - *Corto Plazo* $(\beta_0 + \beta_1)$*:* Esta tasa no puede ser inferior a la Tasa TRI mensual (equivalente diaria), ni puede ser superior a la Tasa de Interés de Facilidad Permanente de Crédito.
    - *Concavidad/Convexidad* (β_2, β_3)*:* La concavidad/convexidad de las jorobas están acotadas superior e inferiormente, de manera que no se pueden superar el 3 % equivalente anual, ni superior ni inferiormente.
    - *Momentos de Inflexión* (η_1, η_2)*:* Se restringe la variabilidad de la curva de manera que los momentos donde ocurre la joroba están acotados a que su variación no exceda los 2 años con respecto a su valor de la semana anterior. Además, no se permite que sean valores negativos ni que superen los 10 años (restricciones absolutas).
    - *No-Arbitraje:* Como se demostró en el Teorema 5, es necesario que las tasas forward instantáneas sean no-negativas para que no existan posibilidades de arbiraje. Se utiliza una restricción no-lineal sobre las tasas forward instantáneas dadas por (23) si se utiliza el modelo de Nelson-Siegel o (25) si se emplea la ecuación de Svensson. Por la no-linealidad de la restricción, se emplea una penalización en la optimización para cada vez que se incumpla esta condición.

3.3. Ajustes de los Parámetros de la Optimización

Se realiza un análisis para escoger el método de optimización más apropiado, así como la modelación que mejor se ajuste a los datos observados en Costa Rica.

3.3.1. Comparación de Algoritmos de Optimización

Para efectos de cuantificar la calidad del ajuste se emplean los siguientes indicadores de rendimiento (KPI's) de la optimización: el error promedio ponderado dado por (29); el error máximo, siendo este el valor absoluto de la mayor diferencia entre los valores teóricos y los valores observados; así como la velocidad de convergencia (duración).

Cabe recalcar que los errores y la duración son los promedios de los estimadores obtenidos al realizar la optimización iterada desde enero del 2018 hasta diciembre del 2024. Además, dentro de los cálculos se fijó $\alpha = 0$ en el ponderador (30) de manera que se obtuvieran los indicadores de cada método sin una mayor influencia de la semana de operación.

Cuadro 1: Resultados de los Métodos de Optimización.

Modelo	Método	Error Ponderado	Error Máximo	Duración (min)
Nelson-Siegel	Nelder–Mead	$0{,}00014508$	$0{,}0400119$	$0{,}97$
Nelson-Siegel	PSO	$0{,}00013349$	$0{,}0388940$	$12{,}39$
Nelson-Siegel	Algoritmo Genético	$0{,}00013380$	$0{,}0392003$	$59{,}79$
Nelson-Siegel	Simulated annealing	$0{,}00021714$	$0{,}0514051$	$72{,}67$
Svensson Modificado	Nelder–Mead	$0{,}00010563$	$0{,}0317675$	$10{,}51$
Svensson Modificado	PSO	$0{,}00018267$	$0{,}0444184$	$16{,}57$
Svensson Modificado	Algoritmo Genético	$0{,}00010247$	$0{,}0331180$	$59{,}61$
Svensson Modificado	Simulated annealing	$0{,}00413414$	$0{,}2271802$	$67{,}47$

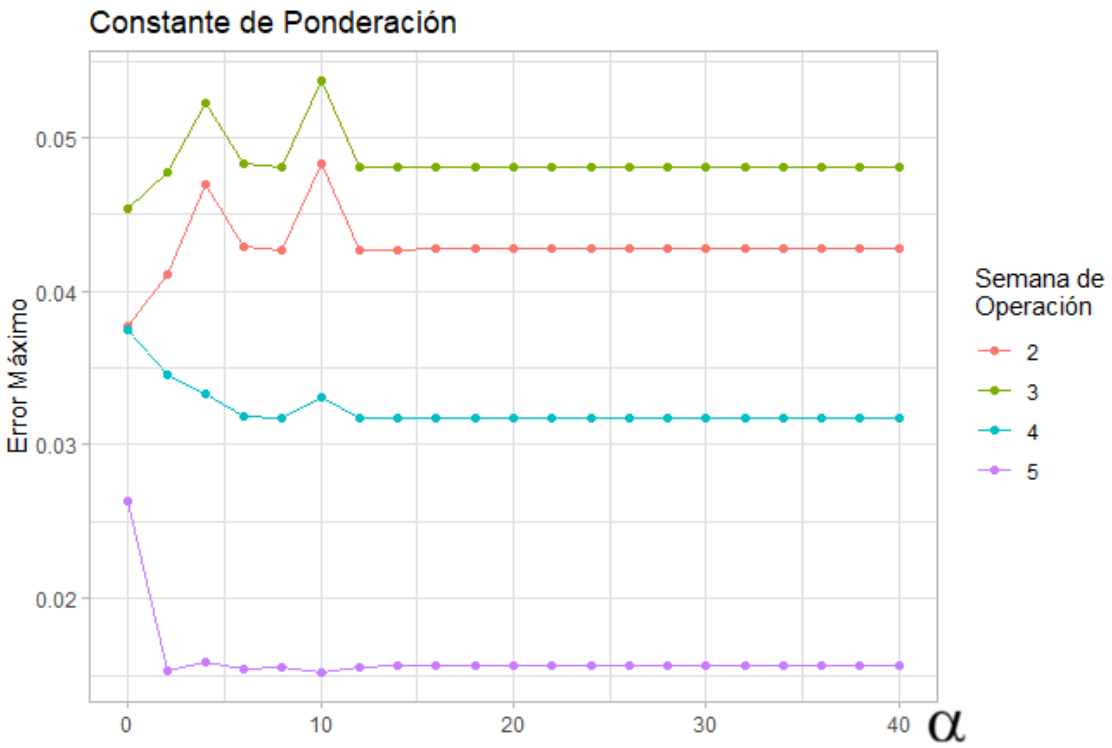
Fuente: Elaboración propia.

Del Cuadro 1 se puede observar que el mejor ajuste de los parámetros se obtiene con el método de Nelder-Mead bajo Nelson-Siegel. Al ver las curvas óptimas generadas a lo largo de las optimizaciones iteradas, se observa que las formas finales no requieren dos jorobas. Esto se confirma al estudiar los errores, tanto el error ponderado como el error máximo, donde no se observa una mejora perceptible al aumentar la complejidad con el método de Svensson. En particular, no se observa una superioridad del modelo Svensson Modificado sobre el Nelson-Siegel como para justificar el uso de un modelo más complicado (con más parámetros), especialmente si se sigue el principio de Parsimonia. Se logra apreciar que los métodos heurísticos muestran errores muy similares al de Nelder–Mead, pero éste último alcanza el mínimo con mayor velocidad. Al realizar una optimización adapativa no se cae en el riesgo de tener mínimos relativos y el método simplex descendente de Nelder–Mead se vuelve el mejor entre todos los implementados.

3.3.2. Ajuste del Parámetro de Ponderación del Rezago

Una vez encontrado el método más funcional, es necesario encontrar el parámetro α más idóneo. Para esto se realizaron varias optimizaciones con Nelder-Mead, para diferentes meses, variando el valor de α de manera que se pudiera visualizar para cuáles valores el error máximo, separando por semana de operación, es frecuentemente más pequeño. Para los datos del mes de marzo de 2024 se obtiene el siguiente gráfico.

Gráfico 2: Error máximo por semana de operación para el mes de Marzo de 2024.



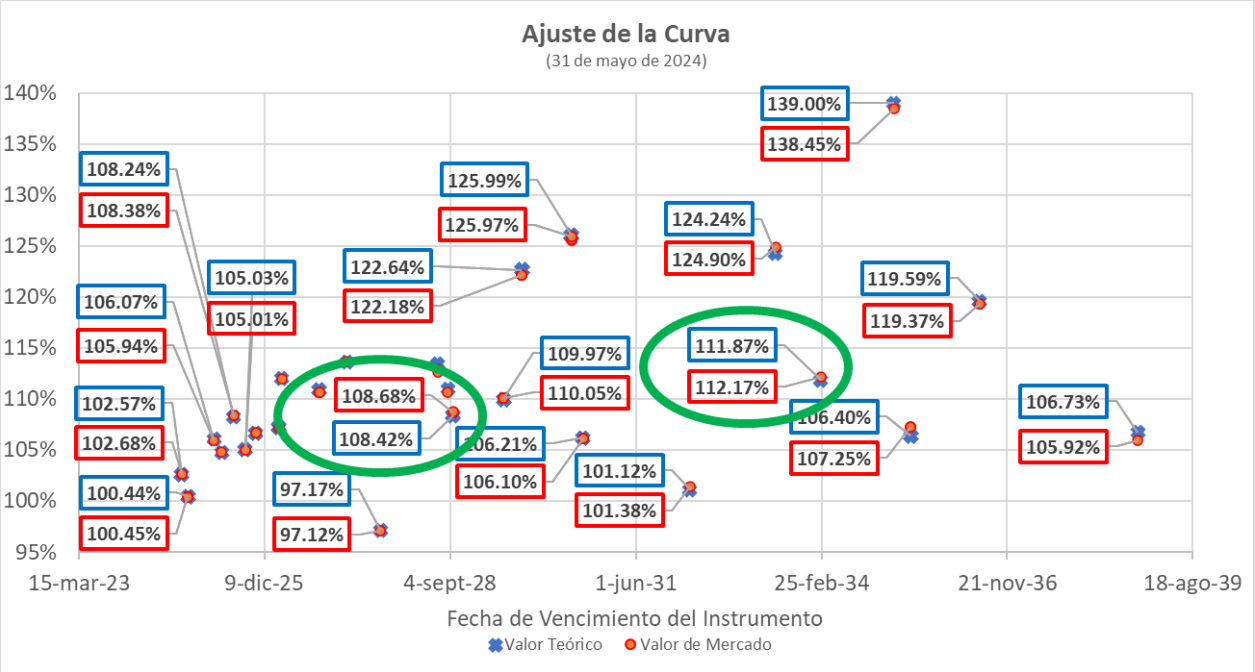
Fuente: Elaboración propia.

Del Gráfico 2 se observa que los errores del ajuste para bonos con fecha de operación en las semanas iniciales del mes tienden a ser más grandes en comparación a bonos con fecha de operación más reciente, es decir, los de la semana cinco. Es fácil notar que a partir de $\alpha = 10$ se obtiene cierta estabilidad de los errores. Para el mes de marzo se encuentran α's ideales cercanos a $4{,}9$ y $5{,}2$ o los cercanos a $8{,}1$. No obstante, estos valores de α's no serían definitivos ya que es lo que se observa con la información de únicamente un mes particular. De acuerdo con el análisis de todos los meses en la ventada de datos (enero 2018 - diciembre 2024), $\alpha = 5$ es el que tiende a generar mejores resultados y por lo tanto se mantiene fijo bajo esta calibración. Es importante repetir estos análisis cada cierto tiempo para validar que el valor óptimo de rezago no ha cambiado.

3.4. Calidad del Ajuste Final

El ajuste de los valores de mercado a partir de este algoritmo se puede apreciar en el Gráfico 3, donde se muestran los valores observados en las transacciones de mercado secundario (valores en rojo) y los valores teóricos resultantes de la curva cero cupón óptima (valores en azul).

Gráfico 3: Valores Observados Versus Valores Teóricos Finales.



Fuente: Elaboración propia.

Considérese el título con vencimiento al 25 de febrero de 2034 y cupones semestrales. El cupón del 25 de agosto de 2028 se valora neto de impuestos y se descuenta con la tasa cero correspondiente a ese plazo. Aplicando la curva cero a todos los flujos se obtiene un valor teórico de $111,87\,\%$, muy cercano al precio de mercado observado de $112,17\,\%$.

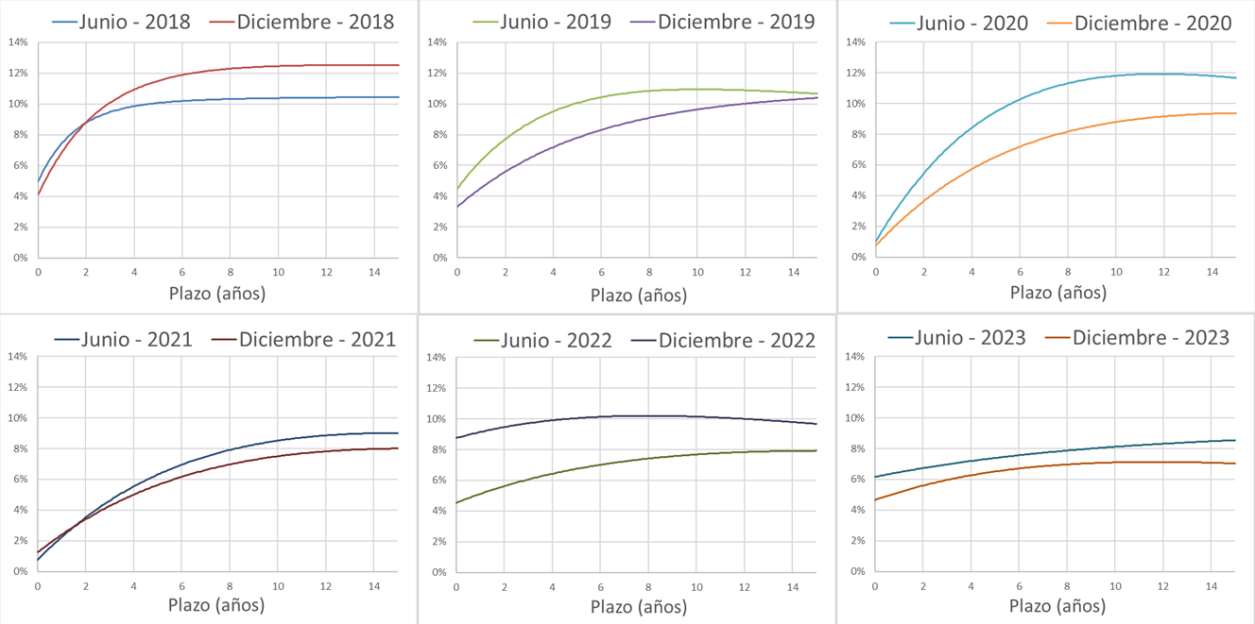
De modo análogo, para el instrumento que vence el 4 de setiembre de 2028 -cuya tasa cero será prácticamente igual a la del 25 de agosto de 2028 por la suavidad de la curva paramétrica de Nelson-Siegel- se descuentan el principal y su cupón final con ese factor, obteniéndose un valor teórico de $108,42\,\%$, próximo al observado $(108,68\,\%)$.

A diferencia de una curva de TIR, donde cada bono se valora con una única tasa (véase (9), dependiente del vencimiento), en la curva cero cupón se usan tasas específicas para cada flujo; ello garantiza un ajuste conjunto y coherente de todos los precios. El Gráfico 3 muestra que para la curva final obtenida, los valores teóricos reproducen adecuadamente los valores observados a lo largo de todos los vencimientos.

4. Estimación de la ETTI: Curva Cero Cupón e Indicadores

En esta sección se presentan las curvas cero cupón, según la Definición 10, generadas con el modelo y los parámetros escogidos. En el Gráfico 4 se muestran las curvas cero cupón para varios meses entre junio de 2018 y diciembre de 2023.

Gráfico 4: Curvas Cero Cupón: Junio 2018 - Diciembre 2023.



Fuente: Elaboración propia.

Entre las ventajas que brinda contar con una curva cero cupón se encuentra el hecho de que sus tasas conforman expectativas de mercado (ver ecuación (4)), en otras palabras, la forma de la curva cero cupón brinda información sobre lo que esperan los agentes económicos sobre el futuro así como lo que están observando en el presente.

4.1. Interpretación de las Curvas Cero Cupón

La curva cero cupón sintetiza, para cada vencimiento T, el costo de descontar flujos futuros mediante el factor $P(0,T)$. Su forma puede caracterizarse por tres dimensiones: (i) *nivel* (el grado general de los rendimientos a lo largo de la curva), (ii) *pendiente* (la relación entre tramos corto y largo, muy sensible a la política monetaria) y (iii) *curvatura* (jorobas o mesetas intermedias asociadas a expectativas concentradas y/o primas por preferencia de la liquidez y riesgo crédito). A continuación se analiza el Gráfico 4 y la interpretación de cada año sobre la información que brinda cada curva cero cupón.

- **2018 - Curvas Empinadas por Mayor Riesgo:** Durante este periodo Fitch modificó la perspectiva de Costa Rica de “estable” a “negativa” el 18 de enero. Por su parte, Standard and Poor’s no modificó la calificación en febrero pero advirtió del impacto que tendría el desequilibrio fiscal en la estabilidad macroeconómica. Paralelamente, el “spread” por riesgo país mostrado por el indicador EMBIG pasó de 367 puntos a 386 puntos, entre diciembre 2017 y junio 2018.

- **En junio de 2018 la curva presenta una pendiente positiva y marcada:** los rendimientos de mediano y largo plazo se sitúan apreciablemente por encima del tramo corto. Esta configuración es coherente con un aumento del riesgo soberano percibido y de la prima por plazo (preferencia de liquidez), en un contexto de tensiones fiscales y condiciones financieras internacionales más estrictas.
- **Para diciembre de 2018 la empinación se acentúa:** el tramo largo incorpora un sobrecargo adicional frente a junio, mientras el extremo corto no se ajusta en igual magnitud. En términos de *"forwards"*, se observan trayectorias crecientes a horizontes de 3–7 años, propias de episodios en los que la prima estructural domina a las variaciones del inicio de la curva.

- **2019 - Aplanamiento Incipiente con Riesgo Largo Persistente:** A lo largo del año se observa una política monetaria más expansiva a nivel local, que reduce el costo del tramo corto, pasando de un $5,25$ % en enero de 2019 hasta alcanzar un $2,75$ % al final de ese año. Sin embargo, el riesgo fiscal y las necesidades de financiamiento mantienen elevada la remuneración exigida en vencimientos largos. Por ende, la curva comienza a aplanarse, sin que el tramo largo converja a niveles bajos.
  - **En junio de 2019 se mantiene empinada pero relajándose:** Los recortes de la tasa de política desplazan a la baja el inicio de la curva cero cupón, lo que favorece el aplanamiento. Los *forwards* de 1–3 años disminuyen, sugiriendo más recortes de la TPM producto de una inflación contenida a corto plazo.
  - **En diciembre de 2019 se describe como estándar pero aún empinada:** El tramo corto de la curva cero cupón permanece relativamente bajo por causa de la fuerta reducción en la tasa de política monetaria, pero el largo sigue alto por riesgo fiscal y prima por plazo. El aplanamiento frente a 2018 es visible pero incompleto. Las forwads esperadas en junio de 2019 eran aparentemente correctas, en vista de la reducción sostenida de la TPM a lo largo del segundo semestre del 2019.

- **2020 - Ultra-Empinada por el Shock de la Pandemia:** La irrupción del COVID-19 provoca una fuerte relajación monetaria y condiciones extraordinarias de liquidez. En los primeros 6 meses las calificadoras de riesgo (Fitch, Moody's y Standard and Poor's) redujeron la calificación de riesgo de Costa Rica, como consecuencia del sostenido déficit fiscal. Paralelamente, la inflación cae por debajo del 1 %, lo que causa que el BCCR mueva la TPM pasando del $2,75$ % hasta $0,75$ %. El corto cae a mínimos históricos por la respuesta de política, mientras que el largo resiste por mayor prima soberana, incertidumbre macro y preferencia por liquidez.

- **En junio de 2020 se vuelve ultra-empinada:** El corto plazo en niveles bajos, mientras que el tramo medio-largo se incrementa por causa del repunte del riesgo y la volatilidad. Forwards cortos deprimidos (expectativas de unas TPM sostenidamente bajas), mientras que los forwards largos relativamente altos.
- **En diciembre de 2020 se mantiene empinada pero con menor tensión:** El corto permanece en mínimos pero se alcanzan los niveles altos del largo plazo de la curva de manera más suave (comienza a perder el empinamiento), como señal de una posible estabilización asociada a los avances en la reapertura global. Los forwards dejan de escalar en horizontes largos, indicando que la prima por plazo deja de escalar.

- **2021 - Normalización con Aplanamiento (*Bear–Flattening*):** La reactivación en la pospandemia provocan el giro de la política monetaria hacia la normalización. El corto plazo de la curva y el tramo largo permanecen relativamente anclados, lo que sugiere que el nivel de equilibrio de largo plazo no se espera que aumente. En el escenario global, se empieza a observar el surgimiento de una inflación (interanual) elevada, pasando de ser en enero del $1,35\,\%$ en Estados Unidos y del $0,91\,\%$ en la zona Euro, a ser del $5,31\,\%$ y $1,90\,\%$ en junio, respectivamente. Ya para diciembre, la inflación de Estados Unidos alcanzaba el $7,15\,\%$ y Europa rondaba el $4,96$. Sin embargo, Costa Rica recibe el impacto inflacionario hasta finales del año.
  - **En junio de 2021 se regresa a la normalidad (aplanamiento):** La TPM no sufre cambios y el nivel del corto plazo se mantiene invariable, mientras que la inflación empieza a subir pero siempre por debajo de la meta de inflación. El largo plazo se ancla en el $9\,\%$. La curva no cambia apreciablemente respecto a diciembre de 2020, lo que coincide con el periodo de estabilidad vivido.
  - **En diciembre de 2021 se aprecia el "bear–flattening":** Los incrementos de la inflación se empiezan a observar, la cual a diciembre alcanza un nivel del $3,29\,\%$, pero con inflaciones mensuales promedio del $0,5\,\%$, lo que preocupa al considerar la inflación global elevada. Se inicia un ciclo de alzas en la TPM para paliar la elevada inflación que se esperaba, por lo que la parte corta sube con fuerza mientras el largo se mueve poco. El tramo medio gana curvatura, típico cuando la política domina la dinámica.

- **2022 - Aplanamiento Marcado y Meseta en el Largo:** La inflación global rondaba el orden del $8\,\%$ para junio de 2022 y los choques de materias primas elevan las tasas de corto. Los bancos centrales endurecen con rapidez su política monetaria para afrontar la elevada inflación. El extremo largo permanece relativamente estable en vista de que el mercado no espera que la inflación elevada persista a 7–10 años.

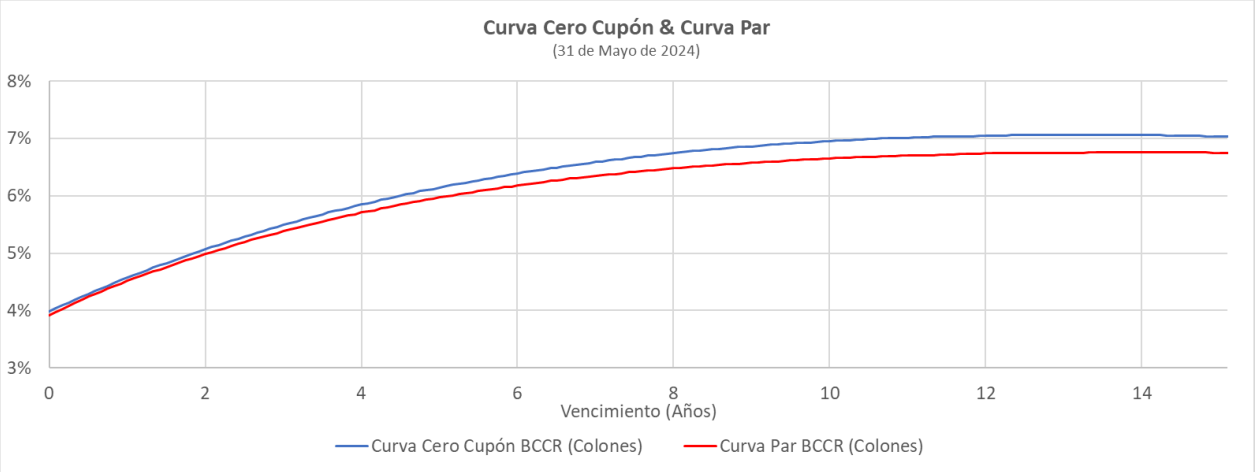
- **En junio de 2022 se vuelve claramente más plana:** Se acelera el crecimiento de la inflación, pasando de $3,49\,\%$ en enero a ser del orden del $10\,\%$ en junio. El ritmo de alzas de la tasa de política para paliar esta inflación, pasando la TPM de $1,25\,\%$ en enero a $4\,\%$ en junio, empujan el frente de la curva. La curva se aplana producto de que el largo queda anclado, lo cual se explica por el hecho de que el mercado no espera que los registros elevados de inflación persistan a horizontes de 7–10 años.
- **En diciembre de 2022 se aplana (meseta):** La inflación interanual alcanza su máximo del $12,12\,\%$ en agosto, mientras que la TPM continúa su ascenso hasta alcanzar su máximo en diciembre de 2022 con un valor del $9\,\%$, de modo que el corto plazo de la curva aumenta y el largo plazo muestra poca sensibilidad adicional, volviendo completamente plana la curva. La estructura de *forwards* sugiere un pico en 1–2 años y una suavización posterior, consistente con una desinflación esperada y recortes a partir de 2023.

- **2023 - Descenso General y Pendientes Suaves:** La inflación se desacelera con rapidez (se inicia una deflación a partir de junio y durante el resto del año) y la política monetaria inicia un ciclo de recortes (pasa del $9\,\%$ a inicios de año, hasta alcazar el $6,25\,\%$ a final del año). Se comprime la prima por plazo, la prima de riesgo (Moody's mejora la calificación del país de B2 a B1) y mejora el tono de liquidez, con una caída del nivel de la curva en casi todos los tramos.
  - **En junio de 2023 desciende todo el perfil (bull–flattening):** Se aplana por el plazo corto de la curva, principalmente porque la inflación se desacelera con fuerza (incluso en terreno negativo en parte del año) y la política monetaria inicia un ciclo de recortes. Los *forwards* a 1–3 años caen, señalando normalización de la postura monetaria.
  - **En diciembre de 2023 se aplana y baja:** Se consolidan niveles reducidos, con corto plazo más bajo (reducción de la TPM) y con primas largas contenidas (mejora en la percepción de riesgo de crédito del país). El extremo largo acompaña a la baja sin tensiones adicionales.

4.2. Curva Cero Cupón y Curva Par

A partir de la curva cero cupón en colones, se utiliza (12) para construir la curva par en colones para Costa Rica. Se sigue la Definición 14 y se presenta en el Gráfico 5 la curva cero cupón y la curva par en colones para Costa Rica al 31 de mayo de 2024.

Gráfico 5: Curva Cero Cupón y Curva Par en Colones al 31 de Mayo 2024.



Fuente: Elaboración propia.

Esta curva es consistente con la teoría, donde se sabe que si la curva cero cupón es creciente, entonces las tasas cero son mayores que las tasas par. Específicamente, el libro de Hull (2021) indica lo siguiente:

> *"When the zero curve is upward-sloping, the zero rate for a particular maturity is greater than the par yield for that maturity. When the zero curve is downward-sloping the reverse is true."*

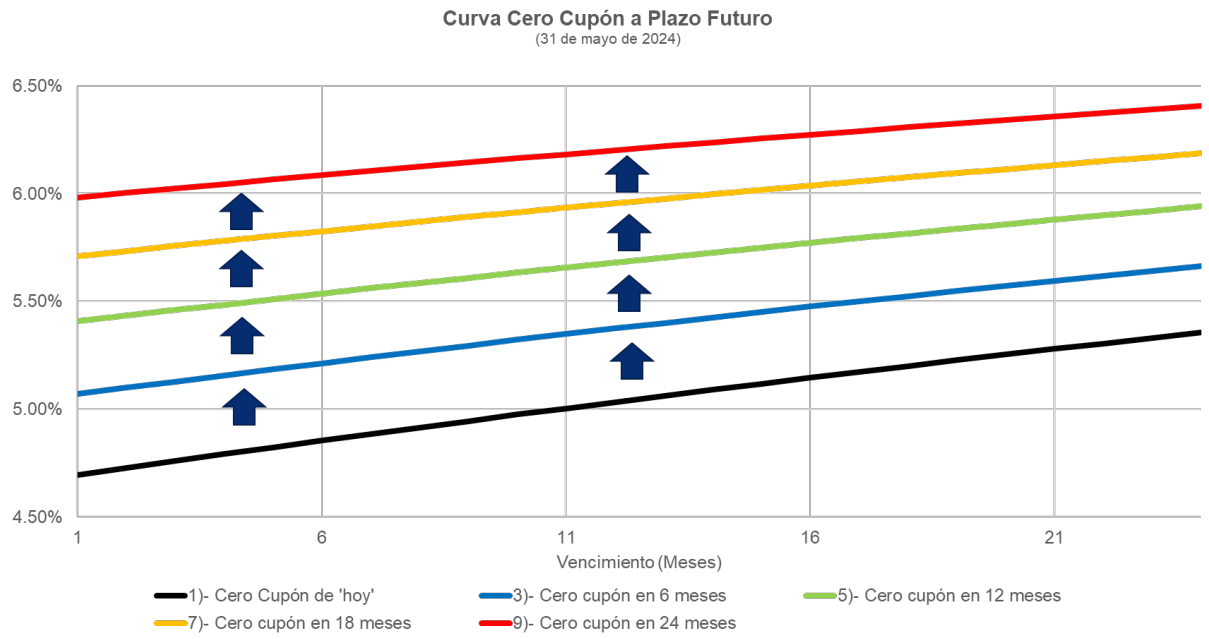
4.3. Curva Cero Cupón Forward

Siguiendo la Definición 17, se puede construir la curva cero cupón forward, donde se muestra el comportamiento esperado por el mercado para la curva cero cupón en momentos futuros. En el Gráfico 6 se muestran las tasas de interés forward observadas en el mes de mayo de 2024.

En marzo de 2024, se espera que las curvas cero cupón forward aumenten de manera uniforme para los plazos futuros. Esto sugiere la existencia de una prima por plazo positiva; a la vez, el desplazamiento al alza de todas las tasas difícilmente se explica sólo por primas, por lo que es coherente con expectativas de tasas algo más altas a 6–24 meses más una prima por plazo que no desaparece.

Para validar la lectura de las tasas forward es conveniente vigilar los siguientes factores: sorpresas de inflación (breakevens/encuestas), la comunicación y decisiones del Banco Central, la oferta de deuda y liquidez (que afectan la prima) y el riesgo externo (crecimiento global o choques en los precios de los bienes).

Gráfico 6: Curvas Cero Cupón Forward en Colones para Costa Rica al 31 de Mayo 2024.

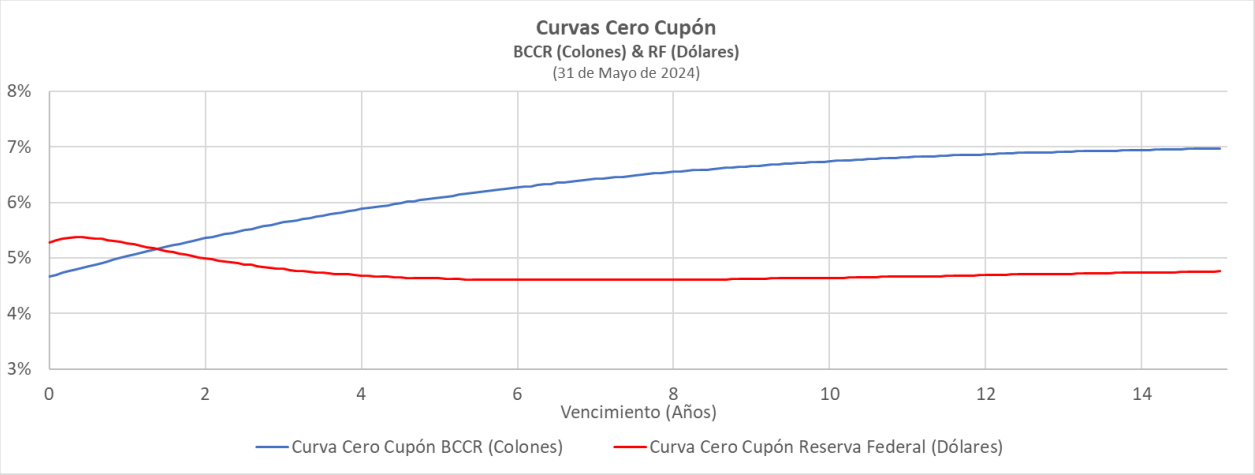


Fuente: Elaboración propia.

4.4. Tipo de Cambio Forward y Premio Cambiario

Al entremezclar la información de la curva cero cupón de Costa Rica con la curva cero cupón de la Reserva Federal (RF - FED), se puede analizar el spread de tasas entre colones y dólares. En el Gráfico 7 se muestra la curva cero cupón en colones y la curva cero cupón construida por la RF en dólares.

Gráfico 7: Curvas Cero Cupón en Colones y Dólares al 31 de Mayo 2024.

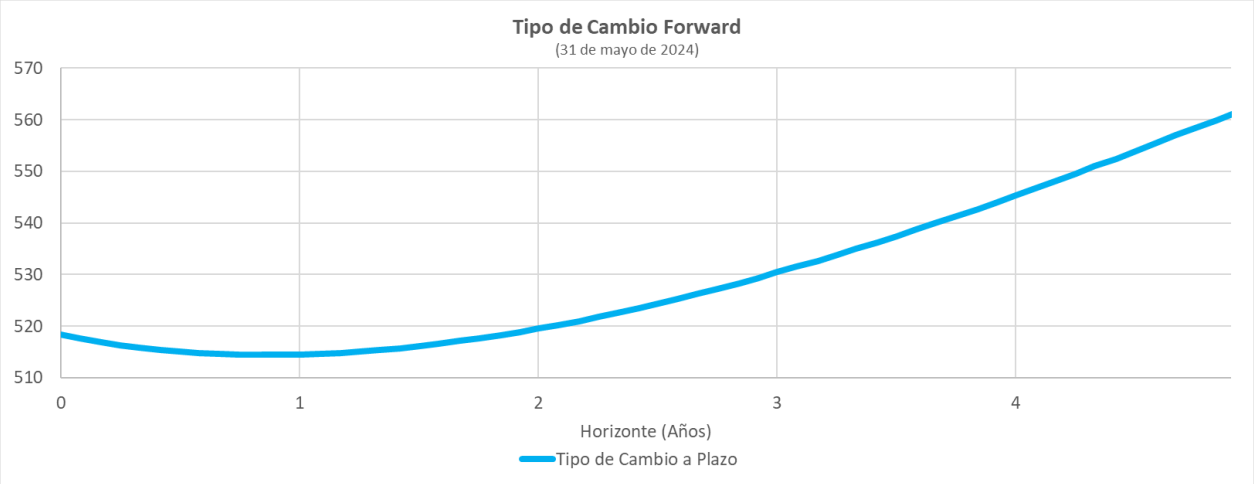


Fuente: Elaboración propia.

Se puede ver que, para ese mes, Costa Rica estaba pagando menos interés que Estados Unidos para inversiones inferiores al año. Cabe recordar que para ese periodo la TPM rondaba el $4,75\,\%$ mientras que la tasa de política monetaria de Estados Unidos (The effective federal funds rate (EFFR)) era del $5,33\,\%$. Desde ese mes y por el resto del año, la EFFR era superior a la TPM de Costa Rica.

De la Definición 20 se construye, para distintos momentos futuros, la curva de tipo de cambio forward, el cual se muestra en el Gráfico 8. A partir de este diferencial entre tasas de política monetaria, aunado a la ecuación (8), se puede notar que el tipo de cambio forward es decreciente en los primeros meses.

Gráfico 8: Tipo de Cambio Forward al 31 de Mayo 2024.



Fuente: Elaboración propia.

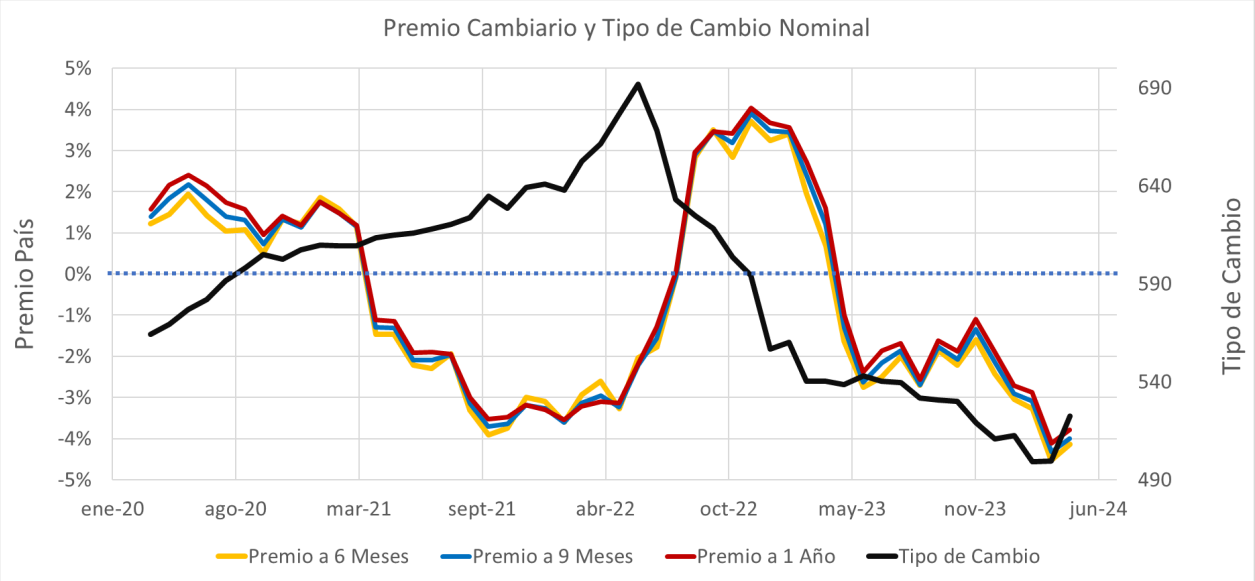
Finalmente, con esta información y haciendo uso de las expectativas de mercado de tipo de cambio que se construyen en el Banco Central de Costa Rica (2020), aunado al premio Cambiario (22), se puede construir la curva de premio cambiario según la Definición 22.

Al tomar momentos focales (6 meses, 9 meses y 1 año) se puede estimar el premio cambiario (equivalente anual) para cada uno de estos plazos, para lo cual se utiliza la siguiente ecuación:

$$\underbrace{\Lambda(t,T)}_{\text{premio cambiario}} := e^{\lambda(t,T)} - 1 := e^{\delta^{(d)}(t,T) - \delta^{(f)}(t,T) - \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\delta^{d/f}_{\Delta_E}(t,T)\right]} - 1, \tag{31}$$

donde $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\delta^{d/f}_{\Delta_E}(t,T)\right]$ son las expectativas (de mercado) de devaluación calculadas por el BCCR, $\delta^{(d)}(t,T)$ es la tasa cero cupón (compuesta continuamente) en colones del BCCR y $\delta^{(f)}(t,T)$ es la tasa cero cupón (compuesta continuamente) en dólares de la RF. En el Gráfico 9 se muestra la evolución del premio cambiario para esos plazos focales.

Gráfico 9: Evolución del Premio Cambiario y Tipo de Cambio.



Fuente: Elaboración propia.

5. Conclusiones y Limitaciones

Este trabajo presenta una metodología operativa y libre de arbitraje para estimar la curva cero cupón en colones para Costa Rica, construida a partir de precios observados de bonos soberanos (cero cupón y cuponados a tasa fija) del Gobierno y del Banco Central, incorporando explícitamente impuestos sobre las ganancias de capital, ponderaciones por monto negociado y antigüedad de la transacción, así como restricciones no lineales de no–arbitraje sobre las tasas forwards instantáneas. Se desarrolla lo siguiente:

1. **Consistencia de no–arbitraje y ajuste conjunto:** Valorar cada flujo de los bonos cuponados con la estructura de factores de descuento $P(t,T)$ garantiza coherencia entre instrumentos (Teoremas 2 y 3) y elimina las incoherencias de una “curva TIR”. El resultado empírico es un ajuste holístico robusto de las valoraciones a lo largo de vencimientos, evidenciado en el Gráfico 3.

2. **Nelson–Siegel con restricciones (parsimonia):** En la comparación de algoritmos (Cuadro 1), el modelo *Nelson–Siegel* sujeto a restricciones de no–arbitraje y a cotas dinámicas en los parámetros, combinado con *Nelder-Mead* y *warm start* semanal, ofrece el mejor compromiso entre calidad de ajuste, velocidad de convergencia y estabilidad intertemporal. La opción parsimoniosa es preferible, en vista de que la mayor flexibilidad del *Svensson modificado* no implicó mejoras materiales en los errores para el mercado local.

3. **Ponderación "tropicalizada" y rezagos:** La función de pérdida ponderada por monto y antigüedad ((29)–(30)) mitiga la baja bursatilidad, mejora la robustez frente a outliers y prioriza información fresca sin descartar completamente el historial. La calibración sugiere valores de α en torno a 5 para el periodo analizado (Gráfico 2).

4. **Indicadores económicos:** A partir de la curva cero cupón se construyen, de forma coherente, las tasas *forward*, la curva *par* y la curva de *premio cambiario*. Estos indicadores permiten lecturas claras sobre expectativas de tasas, primas por plazo y peremio país, y contextualizan los episodios macro-financieros.

En conjunto, la contribución es triple: (i) abandonar la TIR como insumo y modelar sobre valores netos con impuestos, (ii) imponer explícitamente no–arbitraje con restricciones sobre las tasas forward instantáneas y (iii) "tropicalizar" la estimación a un mercado de baja liquidez mediante ponderaciones y *warm start*. El resultado es una curva operativa, estable y útil para valoración, gestión de riesgos y análisis de política.

Limitaciones. Aunque la metodología propuesta es operativa y produce resultados que son económicamente razonables, subsisten limitaciones que conviene explicitar:

1. **Baja bursatilidad:** La escasez de transacciones en ciertos tramos obliga a usar ventanas con rezago y ponderaciones, lo que introduce *trade-offs* entre actualidad y estabilidad. La ausencia de STRIPS y de derivados líquidos limita anclajes directos en algunos vencimientos.

2. **Calibración de las ponderaciones:** El parámetro α de la ponderación se fijó a partir del desempeño promedio. Cambios en microestructura (mayor bursalitilidad o más oferta de títulos) podrían requerir recalibraciones de este parámetro.

3. **Medida de riesgo neutral vs. mundo real:** Las tasas forward reflejan, en general, valoraciones bajo medida de riesgo neutral; su lectura como expectativas "puras" requiere separar primas (de plazo, liquidez, crédito), lo cual depende de modelos adicionales y de datos externos.

En suma, la metodología logra el objetivo de construir una curva cero cupón en colones, libre de arbitraje y útil para valoración y riesgos, con un diseño cuidadoso para el mercado costarricense. La adopción institucional, junto a los indicadores económicos derivados de la curva cero cupón, así como una gobernanza de datos rigurosa, permiten consolidar su uso como referencia estándar para decisiones de inversión, gestión de pasivos y análisis de política monetaria.

Referencias

Alfaro, E; Naranjo, G (2023). **Cálculo de las Tasas Forward y Propuesta para su Posible uso en Costa Rica**. Tesis de Maestría, Sistema de Estudios de Posgrado, Universidad de Costa Rica.

Alpízar, G.; Echeverría, R.; Quirós, M; Salazar, M. (2005). **Modelación de las Estructuras de Tasas de Interés Nominales para Costa Rica**. Academia de Centroamérica.

Banco Central de Costa Rica (2020). **Aspectos Metodológicos del Cálculo de la Curva de Rendimientos Soberana**. Junta Directiva del BCCR, Sesión 5963-2020.

Banco Central de Costa Rica (2020). **Nota Metodológica: Expectativas de Mercado**. BCCR.

Bank for International Settlements (2005). **Zero-Coupon Yield Curves: Technical Documentation**. Working Paper 25, BIS.

Björk, T. (2020). **Arbitrage Theory In Continuous Time**. Cuarta Edición, Oxford University Press.

Bolder, D.; Streliski, D. (1999). **Yield Curve Modeling at the Bank of Canada**. Technical Report No. 84, Bank of Canada, pp. 1–69.

Bolsa Nacional de Valores (2003). **Metodología de cálculo del Vector de Precios**. BNV, Costa Rica.

Brigo, D.; Mercurio, F. (2006). **Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit**. Segunda Edición, Springer Finance.

Cairns, A. (2004). **Interest Rate Models, An Introduction**. Princeton University Press.

Fama, E. F. (1984). *Forward and Spot Exchange Rates.* Journal of Monetary Economics, 14(3), 319-338.

Gao, H.; Lixing, F. (2012). **Implementing the Nelder-Mead Simplex Algorithm with Adaptive Parameters**. Computational Optimization and Applications, Volumen 51, pp. 259–277.

Gürkaynak, R.; Sack, B.; Wright, J. (2006). **The U.S. Treasury yield curve: 1961 to the present (Finance and Economics Discussion Series, 2006-28)**. Board of Governors of the Federal Reserve System.

Hull, J. (2021). **Options, Futures and Other Derivatives**. Décimo Primera Edición, Pearson Prentice Hall.

Hvass, M. (2010). **Good Parameters for Particle Swarm Optimization**. Technical Report No. HL1001, Hvass Laboratories, (2010).

International Financial Reporting Standards (2014). **Normas Internacionales de Información Financiera 9**. IFRS Foundation.

International Financial Reporting Standards (2011). **Normas Internacionales de Información Financiera 13**. Instrumentos Financieros, IFRS Foundation.

Nelson, A.; Siegel, C. (1987). **Parsimonious Modeling of Yield Curves**. Journal of Business, Volumen 60, Número 4, pp. 473–489.

Lee, M., El-Sharkawi, K. (2008). **Modern Heuristic Optimization Techniques: Theory and Applications to Power Systems**. Wiley-IEEE Press.

Quirós, A.; Trejos, J. (2017). **Estimation of the Yield Curve for Costa Rica Using Combinatorial Optimization Metaheuristics Applied to Nonlinear Regression**. Computational Intelligence for Business Analytics, Studies in Computational Intelligence, Volumen 953.

Reis, R. (2015). **Different Types of Central Bank Insolvency and the Central Role of Seignorage**. Working Paper, Número 21226, National Bureau of Economic Research.

Ross, S. (1997). **Introduction to Probability Models**. Sexta Edición, Academic Press, California.

Svensson, L. (1994). **Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–1994**. Institute for International Economic Studies, pp. 579.

Taylor, H.; Karlin, S. (1998). **An introduction to Stochastic Modeling**. Tercera Edición, Academic Press, San Diego.

Trejos, J.; Piza, E.; Bermudez, E. (2014). **Comparison of Nelson-Siegel and Svensson Models in the Optimization of Yield Curves in the Costa Rican Market**. Ciencia y Tecnología, Volumen 30, Número 2, pp. 16-26.

Verplaetse, A.; Hoffmeyer, E.; Christodoulou, E.; Rojo, L.; de Larosikre, J.; Doyle, M.; Ciampi, C.; Jaans, P.; Duisenberg, W.; Beleza, M.; Leigh-Pemberton, R. (1993). **Anual Report 1992**. Committee of Governors of the Central Banks of the Member States of European Economic Community.

Víquez, J.; Barboza, L.; Ramírez, A. (2005). **Curva de Rendimientos Cero Cupón para el Mercado Costarricense**. Dirección Corporativa de Riesgos, Banco Nacional de Costa Rica.