BANCO CENTRAL DE COSTA RICA

DOCUMENTO DE TRABAJO
N.º 001 | 2015

Combinación de estimaciones del producto potencial con un método bayesiano

Carlos Monge Badilla
Alberto Vindas Quesada

Fotografía de portada: “Presentes”, conjunto escultórico en bronce, año 1983, del artista costarricense Fernando Calvo Sánchez. Colección del Banco Central de Costa Rica.

Combinación de estimaciones del producto potencial con un método bayesiano

Carlos Monge Badilla*, Alberto Vindas Quesada†

Las ideas expresadas en este documento son de los autores y no necesariamente representan las del Banco Central de Costa Rica.

Resumen

En el documento se realizan distintas metodologías de estimación del producto potencial para la economía costarricense. Dentro de los métodos que se utilizan para estimar esta variable no observable, se pueden mencionar la descomposición Beveridge-Nelson, el ltro Hodrick Prescott, la función de producción, el ltro de Kalman y el VAR estructural (SVAR). Los resultados de estos modelos se promedian empleando el método de Ponderación bayesiana de modelos (Bayesian Model Averaging, BMA), por medio de una curva de Phillips, con el n de determinar los pesos óptimos para la obtención de un único indicador de producto potencial.

Palabras clave: Producto potencial, ponderación, bayesiana, Kalman, SVAR.

Clasificación JEL: C11, C32, E50.

* Departamento de Investigación Económica. División Económica, BCCR. mongebc@bccr.fi.cr
† Departamento de Investigación Económica. División Económica, BCCR. vindasqa@bccr.fi.cr

Combination of Potential Output Estimates With a Bayesian Method

Carlos Monge Badilla[‡], Alberto Vindas Quesada[§]

The ideas expressed in this paper are those of the authors and not necessarily represent the view of the Central Bank of Costa Rica.

Abstract

In this paper, we calculated the potential output for the Costa Rican economy. First, we applied several different methods to calculate this non-observable variable, such as the Beveridge-Nelson decomposition, Hodrick-Prescott lter, production function, Kalman lter, and SVAR. Then, we combined the results of these methods using Bayesian Model Averaging (BMA) and a Phillips curve. Finally, we obtained optimal weights for each estimated potential product and, estimated an indicator of the potential output series.

Key words: Potential product, averaging, bayesian, Kalman, SVAR.

JEL codes: C11, C32, E50.

[‡] Department of Economic Research. Email address. mongebc@bccr.fi.cr
[§] Department of Economic Research. Email address. vindasqa@bccr.fi.cr

Estimaciones alternativas del producto potencial y su combinación

Contenido

1. Introducción **1**

2. Estimaciones **1**

2.1. Descomposición Beveridge-Nelson (BN) 1

2.2. Función de producción 4

2.3. Filtro de Kalman 4

2.4. Filtro Hodrick-Prescott 8

2.5. Vectores autorregresivos estructurales 9

3. Combinación bayesiana **11**

3.1. Promediado Bayesiano de Modelos (BMA) 11

3.2. Estrategia de combinación 13

3.3. Resultados 14

4. Conclusiones **16**

5. Bibliografía **18**

6. Anexos **20**

6.1. Gráficos 20

Índice de gráficos

1. Brecha de producto según combinación bayesiana 2000.1-2013.2 15
2. Crecimiento producto potencial combinado y su promedio 2001.1-2013.2 16
3. Brechas de producto según las distintas estimaciones 2000.1-2013.2. 20
4. Producto potencial según combinación bayesiana (en logaritmo natural) 2000.1-2013.2. . 20

Índice de cuadros

1. Estimación según descomposición BN Costa Rica: 1991.1-2013.4 3
2. Estimación según filtro de Kalman Costa Rica: 2000.1-2013.4 8
3. Resultados de estimación VAR estructural 11
4. Resumen de estadísticas de brechas estimadas 14

Estimaciones alternativas del producto potencial y su combinación

1. Introducción

La estimación adecuada del producto potencial y de la brecha del producto es necesaria para orientar la formulación de la política monetaria. La identificación del estado que presenta la economía dentro del ciclo económico es un factor determinante para estos fines, debido a que permite conocer acerca de presiones de demanda sobre el nivel general de precios.

La importancia de contar con distintas metodologías de estimación del producto potencial y la brecha del producto, radica en que estas son variables no observables. La comparación de sus proyecciones no es una labor tan sencilla como en las variables observables. Por tanto, es deseable tener a disposición un conjunto de estimaciones del producto potencial que funcionen como herramientas para la formulación de política.

Una vez que se cuenta con diversas estimaciones, se puede evaluar metodologías que permitan combinarlas adecuadamente. Estas formas de combinar estimaciones y proyecciones son distintas a las tradicionales por tratarse de variables no observables. De ahí se reviste la importancia de proponer una metodología de combinación, que pueda ser aplicada al conjunto de indicadores del producto potencial y de la brecha del producto.

2. Estimaciones

En esta sección se presentan los detalles de distintos métodos empleados para estimar el producto potencial. Todas las series de tiempo utilizadas tienen periodicidad trimestral.

2.1. Descomposición Beveridge-Nelson (BN)

Esta descomposición propuesta por Beveridge & Nelson (1981), surge del Teorema de descomposición planteado por Wold (1938). Este teorema establece que un proceso $AR(p)$ puede ser representado mediante un proceso $MA(\infty)$, con un componente de tendencia estocástica y otro con tendencia determinística.

Beveridge & Nelson (1981) concluyen a partir de esto que cualquier serie temporal x_t, que sea integrada de orden uno, es decir una serie $I(1)$, se puede representar de la siguiente manera:

$$(1-L)x_t = \mu + C(L)\varepsilon_t \tag{2.1}$$

donde μ es una constante, ε_t es un término de error $i.i.d.$ (independiente e idénticamente distribuido) y $C(L)$ un polinomio de orden q, en el que L es un operador de rezago. Por otro lado, el polinomio $C(L)$ se puede descomponer de la siguiente forma:

$$C(L) = C^*(L)(1-L) + C(1) \tag{2.2}$$

donde $C(L)^*$ es un polinomio de grado $(q-1)$. A partir de las ecuaciones 2.1 y 2.2, se puede obtener el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
(1-L)x_t &= \mu + [C^*(L)(1-L) + C(1)]\varepsilon_t \\
(1-L)x_t &= \mu + C^*(L)(1-L)\varepsilon_t + C(1)\varepsilon_t \\
\Delta x_t &= \mu + C^*(L)\Delta\varepsilon_t + C(1)\varepsilon_t \\
x_t - x_{t-1} &= \mu + C^*(L)\Delta\varepsilon_t + C(1)\varepsilon_t \\
x_t &= x_{t-1} + \mu + C^*(L)\Delta\varepsilon_t + C(1)\varepsilon_t.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Iterando recursivamente el resultado anterior, se puede llegar a la siguiente expresión:

$$x_t = x_0 + t\mu + C^*(L)[\varepsilon_t - \varepsilon_0] + C(1)\sum_{i=1}^{t}\varepsilon_i. \tag{2.4}$$

En la expresión 2.4, se puede apreciar que la serie se compone de tres elementos distintos[1]. El primero, una tendencia determinística, representado por la expresión $t\mu$. Un componente cíclico, representado por $C^*(L)[\varepsilon_t - \varepsilon_0]$ y finalmente una tendencia estocástica, denotada por $C(1)\sum_{i=1}^{t}\varepsilon_i$.

Si en la ecuación 2.4 se denota al componente cíclico $C(L)^*[\varepsilon_t - \varepsilon_0]$ por C_t y al componente tendencial $t\mu + C(1)\sum_{i=1}^{t}\varepsilon_i$ se representa mediante TR_t, se puede expresar de la siguiente forma[2]:

$$x_t = C_t + TR_t \tag{2.5}$$

[1]Dado que se está iterando la serie recursivamente hacia atrás, el término x_0 puede considerarse, o bien nulo, o parte del inicio de la tendencia determinística.

[2]La tendencia esta deteminada a su vez por el proceso $TR_t = \mu + TR_{t-1} + C(1)\varepsilon_t = t\mu + +c(1)\sum_{i=1}^{T}\varepsilon_{t-i}$.

En donde se aprecia claramente la descomposición de la serie de tiempo en un componente temporal y otro permanente. Esta descomposición puede ser desarrollada a partir de cualquier proceso $ARIMA(p, 1, q)$. De manera tal que se procedió a establecer la correcta especificación de la serie a partir de un proceso de esta clase, identificando los parámetros p y q. El resultado de esta estimación se observa en el cuadro 1.

Cuadro 1: Estimación según descomposición BN
Costa Rica: 1991.1-2013.4

Variable dependiente: D(LNY)
Método: MCO
Muestra (ajustada): 1991:4 2013:4
Numero de observaciones: 89
Convergencia alcanzada después de 12 iteraciones

Variable	Coeficiente	Estadístico-t	Prob.
C	0,011072	7,393942	0,0000
AR(2)	-0,960188	-34,81659	0,0000
MA(1)	-0,407463	-7,347325	0,0000
MA(2)	0,883226	16,41735	0,0000
R-cuadrado	0,746046	Media de D(LNY)	0,011613
R-cuadrado ajustado	0,737083	Desv. est. D(LNY)	0,036639
Error estándar regresión	0,018787	Criterio Akaike	-5,067398
Suma de residuos al cuadrado	0,030001	Criterio Schwarz	-4,955549
Log likelihood	229,4992	Criterio HQ	-5,022315
Estadístico-F	83,23553	Durbin-Watson stat	2,373861
Prob. (Estadístico-F)	0,000000		

Fuente: Elaboración propia.

De esta forma, a partir de la información presente en el cuadro 1, se infiere que la especificación del producto real estaría dada por un proceso $ARIMA(3, 1, 2)$, con las siguientes particularidades:

$$\ln y_t = \ln y_{t-1} + \alpha + \beta \ln y_{t-1} + \gamma \ln y_{t-2} + \gamma \ln y_{t-3} + \varepsilon_t + \rho\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}$$

donde $c = 0,011$, $\beta = 0,00$, $\gamma = -0,96$, $\rho = -0,41$ y $\theta = 0,88$. A partir de esto, la descomposición BN para el producto real se establece de la siguiente forma:

$$\ln y_t = \ln y_{t-1} + \frac{\alpha}{(1-\gamma)} + C^*(L)(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) + \frac{(1+\rho+\theta)}{(1-\gamma)}\varepsilon_t$$

En esta especificación se puede observar claramente la presencia del componente cíclico, representado por la expresión $C^*(L)(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$, así como de los dos componentes tendenciales, el determinístico y el estocástico, respectivamente.

2.2. Función de producción

Se toma en cuenta la estimación de la función de producción con capital físico y capital humano como factores, estimada por Monge (2012) para el caso costarricense. Esta presenta la siguiente ecuación, estimada con el criterio de Mínimos Cuadrados Ordinarios Dinámicos:

$$\ln y = -5,04 + 0,58 \ln H + 0,42 \ln K \tag{2.6}$$

A partir de esa ecuación, se estimó el producto potencial, para lo cual se calculó residualmente la productividad total de los factores (PTF). Posterior a esto, se estiman los valores de largo plazo para las series de los factores productivos, con el fin de calcular el producto potencial. De esta forma, dicha serie se realizó mediante la siguiente ecuación:

$$\ln y^{pot} = \ln PFT^* + 0,58 \ln H^* + 0,42 \ln K^* \tag{2.7}$$

El supra índice (*) indica que son las series de utilización de largo plazo, los cuales se obtuvieron mediante la aplicación del filtro Hodrick-Prescott a las series originales, con el fin de aislar el componente tendencial del resto de los componentes de la serie. De esta forma, se obtiene el producto potencial estimado mediante la función de producción.

2.3. Filtro de Kalman

Se contruye una representación estado-espacio de un sistema dinámico de variables relacionadas con la determinación del producto potencial, resuelto mediante el algoritmo propuesto por Kalman (1960). Una representación de este tipo involucra tanto variables observables como variables no observables.

Según Hamilton (1994) una representación estado espacio de este tipo se puede representar a partir del sistema que contiene a las ecuaciones 2.8 y 2.9, denominadas ecuación de estado y ecuación de observación respectivamente.

$$\xi_{t+1} = F\xi_t + v_{t+1} \tag{2.8}$$

$$Y_t = A^{'}x_t + H^{'}\xi_t + w_t \tag{2.9}$$

En donde:

- ξ_t: vector de estado, de dimensión $(r \times 1)$, que contiene variables posiblemente no observables.
- F: matriz de parámetros, de dimensión $(r \times r)$.
- v_{t+1}: vector que contiene ruido blanco, de dimensión $(r \times 1)$.
- Y_t: vector de variables observadas en t de dimensión $(n \times 1)$.
- $A^{'}$: matriz de parámetros, de dimensión $(n \times k)$.
- x_t: vector de variables exógenas o predeterminadas, de dimensión $(k \times 1)$.
- $H^{'}$: matriz de parámetros, de dimensión $(n \times r)$.
- w_t: vector que contiene ruido blanco, de dimensión $(n \times 1)$.

De esta forma, se establece un modelo dinámico para Y_t descrita en términos de un vector de variables que posiblemente no sean observables, es decir, ξ_t. Con relación a las variables de la matriz x_t, Hamilton (1994) afirma que el hecho de que estas sean predeterminadas o exógenas significa que no contienen información sobre ξ_{t+s} o w_{t+s} para $s = 0, 1, 2, ...$, más allá de la contenida en Y_{t-1}, $Y_{t-2}, ...,$ Y_1. Es por este motivo que x_t puede incluir rezagos de Y_t o variables que no están correlacionadas con ξ_τ y w_τ para todo τ.

Este sistema se usa típicamente para describir series de observaciones $\{Y_1, Y_2, ..., Y_T\}$, para lo cual es necesario establecer supuestos sobre los valores iniciales del vector de estado ξ_t, es decir sobre ξ_1. Un supuesto adicional que se realiza en esta etapa es que estos valores iniciales no están correlacionados con cualquier valor de v_t o w_t.

A partir de estos valores iniciales de ξ_t, se establece un proceso recursivo en el cual se proyectan los valores de Y_t, actualizando en cada paso la inferencia sobre ξ_t, a partir del error cuadrático medio de la proyección. Desde este punto, el algoritmo permite obtener una matriz de ganancia (denominada la ganancia de Kalman), la cual logra corregir el error de predicción de $\xi_{t|t-1}$ para proyectar $\xi_{t+1|t}$.

La estimación del producto potencial usando el Filtro de Kalman presentada en este documento, está basada parcialmente en la especificación propuesta por Kuttner (1994). En primer lugar, se establece en el sistema de ecuaciones la modelación correspondiente a la relación del producto real observado y el producto potencial. Dicha especificación se construye sobre la establecida por Watson (1986). Estas ecuaciones son las correspondidas entre la 2.10 y la 2.12. En segundo lugar, se incorpora una ecuación que refleja la relación entre inflación, producto y otras variables relevantes: la Curva de Phillips. Esta ecuación es la 2.13, y también se ve relacionada por la dinámica de las ecuaciones anteriores, debido a que incorpora dentro de sus variables explicativas la brecha del producto.

$$\Delta y_t^* = \mu_y + \varepsilon_t \tag{2.10}$$

$$z_t = \varphi_1 z_{t-2} + \varphi_2 z_{t-3} + u_t \tag{2.11}$$

$$y_t = y_t^* + z_t \tag{2.12}$$

$$\pi_t = \gamma \pi_{t-1} + \delta E_{t-4}(\pi_t) + \beta z_{t-1} + v_t \tag{2.13}$$

En donde:

- y_t: producto observado.
- y_t^*: producto potencial.
- μ_y: promedio de variación del producto potencial, o crecimiento del producto.
- ε_t: término de error, o ruido blanco.
- z_t: brecha del producto, definida también como la diferencia entre el producto observado y el producto potencial.
- u_t: término de error, o ruido blanco.
- π_t: inflación observada en t.
- $E_{t-4}(\pi_t)$: expectativa en $t-4$ de la inflación en t.
- v_t: término de error, o ruido blanco.

Cabe recalcar, que en todos los casos se corroboró que la especificación fuera la adecuada para explicar el comportamiento de las series analizadas en cada ecuación para el caso costarricense, por lo que se varió el número de rezagos, o incluso las variables involucradas, eliminando aquellas que no

contribuían con información al modelo e incluyendo aquellas que si.

A partir de esto, la construcción de la ecuación de estado y la ecuación de observación, representadas en su forma general por 2.8 y 2.9, para este caso específico se observa en las ecuaciones 2.14 y 2.15, respectivamente.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y^*_{t+1} \\ y^*_{t} \\ y^*_{t-1} \\ y^*_{t-2} \\ \mu_{y_{t+1}} \\ \mu_{y_t} \end{bmatrix}}_{\xi_{t+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{bmatrix} y^*_{t} \\ y^*_{t-1} \\ y^*_{t-2} \\ y^*_{t-3} \\ \mu_{y_t} \\ \mu_{y_{t-1}} \end{bmatrix}}_{\xi_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_t \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_{t+1}} \tag{2.14}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ \pi_t \end{bmatrix}}_{y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \gamma & \delta \end{bmatrix}}_{A'} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ y_{t-3} \\ \pi_{t-1} \\ E_{t-4}(\pi_t) \end{bmatrix}}_{\xi_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\theta_1 & -\theta_2 & -\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{H'} \underbrace{\begin{bmatrix} y^*_{t} \\ y^*_{t-1} \\ y^*_{t-2} \\ y^*_{t-3} \\ \mu_{y_t} \\ \mu_{y_{t-1}} \end{bmatrix}}_{\xi_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_t \\ v_t \\ 0 \end{bmatrix}}_{w_t} \tag{2.15}$$

La determinación del sistema de ecuaciones a partir de las ecuaciones anteriormente descritas, para la economía costarricense, se presentan en el cuadro 2.

Cuadro 2: Estimación según filtro de Kalman
Costa Rica: 2000.1-2013.4

Método: Máxima verosimilitud (Marquardt)
Observaciones incluidas: 56
Convergencia alcanzada después de 22 iteraciones

Variables	Coeficiente	Error est.	Estadístico-z	Prob.
z_{t-1}	0,798804	0,207966	3,841035	0,0001
z_{t-2}	-0,747937	0,164300	-4,552255	0,0000
z_{t-3}	0,688793	0,204127	3,374340	0,0007
var_{IS}	1,817235	0,301190	6,033527	0,0000
π_{t-1}	0,339841	0,170438	1,993929	0,0462
π_{t-4}^{exp}	0,615499	0,175620	3,504725	0,0005
z_{t-1}	0,482488	0,235825	2,045960	0,0408
var_{IS}	3,603676	0,431157	8,358150	0,0000
	Final State	Raíz ECM	Estadístico-z	Prob.
y_t^*	1330,176	2,058838	646,0810	0,0000
y_{t-1}^*	1329,220	1,831778	725,6446	0,0000
y_{t-2}^*	1328,255	1,649391	805,3000	0,0000
y_{t-3}^*	1327,313	1,506137	881,2698	0,0000
μ_t^y	3,827024	1,530701	2,500177	0,0124
μ_{t-1}^y	3,827024	1,426729	2,682377	0,0073
Log likelihood	-250,8598	Criterio Akaike		9,768294
Parametros	8	Criterio Schwarz		10,06570
Valores iniciales difusos	0	Criterio HQ		9,882661

2.4. Filtro Hodrick-Prescott

El filtro de Hodrick y Prescott es una herramienta que se usa para descomponer las series de tiempo en su componente tendencial y su componente cíclico. Esta técnica es usada ampliamente, y en términos de producto potencial, se toma la estimación de la serie tendencial como el producto potencial. Al calcularse la tendencia por medio de este filtro, se soluciona el problema especificado en la ecuación 2.16.

$$y_t^{tr} = \arg\min \left\{ \sum_{t=1}^{T} (y_t - y_t^{tr})^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} \left[(y_{t+1}^{tr} - y_t^{tr}) - (y_t^{tr} - y_{t-1}^{tr}) \right]^2 \right\} \tag{2.16}$$

O sea, calcula la tendencia tomando en cuenta la magnitud del componente cíclico y el ritmo de cambio de ésta. El parámetro clave en este problema es λ, que regula la importancia relativa entre el ajuste de la tendencia (primer término al cuadrado) y la variabilidad en su aceleración (segundo término al cuadrado). Entre más aumente λ, más peso se le da a la curvatura de la tendencia, de manera que valores más altos de λ dan como resultado tendencias más suaves. El caso extremo cuando λ tiende a infinito corresponde al ajuste de una tendencia lineal. Si λ fuera cero, no se estaría dando importancia a las variaciones en la tendencia, y el ciclo se reduciría a cero.

Su amplio uso ha derivado en una mayor atención a su implementación. Un punto de particular

interés es la elección del parametro λ. En su versión original, Hodrick y Prescott sugieren un valor de 1600 para series trimestrales. La justificación para este valor recae en la observación de algunos aspectos de la economía estadounidense, por lo que refleja la dinámica observada por los autores. No hay razones a priori para considerar la aplicación de este parámetro como un reflejo fiel de los ciclos económicos en otras economías. Para el caso de Costa Rica, Esquivel & Rojas (2007) y Segura & Vásquez (2011) hacen estimaciones para algunas series de interés. En estos, utilizan metodologías que tratan de hacer comparable la escogencia del λ con las propuestas iniciales para Estados Unidos, de manera que los valores de λ sí reflejen las condiciones de la economía costarricense. Para este estudio, tomamos las recomendaciones de los últimos, que usan datos más actualizados, y aplicamos el filtro tomando $\lambda = 1520$.

2.5. Vectores autorregresivos estructurales

Una manera adicional de estimar el producto potencial es por medio de un modelo de vectores autorregresivos estructurales. Estos modelos permiten recuperar de un modelo VAR relaciones claves, imponiendo restricciones en el sistema de ecuaciones que se interpreta como una forma reducida.

La estrategia de identificación sigue la propuesta de Blanchard & Quah (1989), donde se imponen restricciones de largo plazo. En esta estimación, la atención se centra en tres variables: producto, índice de precios al consumidor e índice de tipo de cambio real efectivo multilateral: $X_t = [\Delta Y_t, \Delta TC_t, \Delta IPC_t]'$.

La formulación estructural del modelo parte del supuesto que hay tres tipos de innovaciones estructurales. Estos corresponden a los choques de oferta, de demanda y nominales: $\varepsilon_t = [\varepsilon_{s,t}, \varepsilon_{d,t}, \varepsilon_{n,t}]'$. Por lo tanto, la representación de medias móviles corresponde a la ecuación 2.17.

$$\begin{aligned} X_t &= A(0)\varepsilon_t + A(1)\varepsilon_{t-1} + A(2)\varepsilon_{t-2} + ... \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} A(j)\varepsilon_{t-j} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Bajo esta forumlación, el producto potencial corresponde a la serie de tiempo del producto cuando es afectada únicamente por los choques de oferta, es decir, cuando $\varepsilon_{d,t} = \varepsilon_{n,t} = 0$. La reconstrucción de esta serie es el objetivo final de este ejercicio. Para ello, se estima inicialmente un modelo autorregresivo, el cual puede ser presentado en su versión de medias móviles como:

$$
\begin{aligned}
X_t &= v_t + C(1)v_{t-1} + C(2)v_{t-2} + ... \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} C(j)v_{t-j}
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

Al estimar este modelo VAR, no damos directamente con las innovaciones estructurales, sino con los choques observados $v_t = [v_{Y,t}, v_{TC,t}, v_{IPC,t}]'$. A partir de esta caracterización, se impone la estructura al modelo para obtener la identificación de los errores estructurales. El primer paso es observar que las innovaciones estructurales y las observadas se relacionan de la siguiente manera:

$$A(0)\varepsilon_t = v_t$$

Por lo tanto, identificando $A(0)$ se podría reconstruir la serie ε_t. Otro aspecto a tomar en cuenta es que:

$$A(j) = C(j)A(0)$$

Entonces, al identificarse $A(0)$ no solo se pueden reconstruir las innovaciones estructurales, sino que se puede recuperar la representación en medias móviles del modelo estructural. Una relación adicional que se debe notar concierne a la variancia de las innovaciones observadas:

$$\Omega = E[vv'] = E[A(0)\varepsilon\varepsilon' A(0)'] = A(0)E[\varepsilon\varepsilon']A(0)'$$

La primera restricción se impone sobre la variancia de los errores estructurales: $E[\varepsilon\varepsilon'] = I$, de manera que se parte del supuesto que las innovaciones estructurales son homocedásticas y que no están correlacionadas. Dada la relación entre los errores observados y estructurales, esto implica que

$$\Omega = A(0)A(0)'$$

La matriz Ω es simétrica, por lo que aporta seis restricciones para identificar la matriz $A(0)$. Hacen falta tres restricciones adicionales para alcanzar la identificación exacta. Estas se imponen por medio de la matriz de coeficientes acumulados:

$$\Xi_\infty = \begin{bmatrix} \sum_{l=0}^{\infty} C_{11}(l) & \sum_{l=0}^{\infty} C_{12}(l) & \sum_{l=0}^{\infty} C_{13}(l) \\ \sum_{l=0}^{\infty} C_{21}(l) & \sum_{l=0}^{\infty} C_{22}(l) & \sum_{l=0}^{\infty} C_{23}(l) \\ \sum_{l=0}^{\infty} C_{31}(l) & \sum_{l=0}^{\infty} C_{32}(l) & \sum_{l=0}^{\infty} C_{33}(l) \end{bmatrix} A(0) \tag{2.19}$$

Esta matriz nos determina la magnitud de los efectos de largo plazo. Las restricciones que se imponen sobre esta matriz se denominan de largo plazo porque se refieren al efecto neto de los choques estructurales. En este caso, se supone que los choques de demanda y nominales tienen un efecto neto nulo sobre el producto potencial. Igualmente, se supone que los choques nominales tampoco afectan el tipo de cambio real en el largo plazo. Esto implica restringir la matriz Ξ_∞ para que sea triangular inferior, con lo que se terminan de imponer las restricciones para poder reconstruir el producto potencial. La naturaleza de estas restricciones permite que puedan haber efectos de corto plazo, pero que eventualmente se cancelan. El cuadro 3 presenta los resultados de la estimación realizada.

Cuadro 3: Resultados de estimación VAR estructural

Variable	Coeficiente	Error estándar	Estadístico z	Probabilidad
$\xi_{1,1}$	0,0130	0,0010	13,0384	0,0000
$\xi_{2,1}$	0,0005	0,0025	0,1790	0,8580
$\xi_{2,2}$	0,0043	0,0037	1,1690	0,2424
$\xi_{3,1}$	0,0235	0,0018	13,0384	0,0000
$\xi_{3,2}$	0,0218	0,0033	6,6546	0,0000
$\xi_{3,3}$	0,0260	0,0020	13,0384	0,0000
Matriz $A(0)$ estimada:		0,0076	-0,0025	0,0018
		0,0110	0,0175	-0,0048
		-0,0025	0,0019	0,0088

3. Combinación bayesiana

En esta sección se va a explicar el proceso para la combinación bayesiana de estimaciones de producto potencial. El instrumental que se usa es el Ponderación Bayesiana de Modelos (BMA, por sus siglas en inglés) desarrollado por Magnus, Powell & Prüfer (2010), la cual se explica a continuación.

3.1. Promediado Bayesiano de Modelos (BMA)

En términos econométricos, el paradigma bayesiano provee una alternativa al enfoque clásico por cuanto incorpora la incertidumbre que se asocia a la selección del modelo y los procedimientos "general a específico". En econometría clásica, los análisis estadísticos se hacen condicionales en la selección correcta del modelo. El enfoque bayesiano, en cambio, modela esta incertidumbre. En este sentido, la ponderación bayesiana de modelos se centra en la obtención óptima de los parámetros, ponderando por probabilidades que se actualizan de acuerdo con la regla de Bayes. Así, considera una gran variedad de

modelos y da como resultado una suma ponderada de los estimadores. Los modelos que se consideran son lineales, por lo que el punto de partida es el modelo de regresión lineal normal:

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon; \qquad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \tag{3.1}$$

Bajo esta formulación, se dividen las variables en dos grupos: uno en el que se encuentran aquellas variables de las que se tiene absoluta certeza que deben ser incluidas (X_1), y otro conformado por las variables son tratadas con reservas y se pretende poner a prueba (X_2). El trato usual es tomar X_1 como la constante, y agrupar el resto de variables en X_2. Se tienen varias combinaciones de modelos; por cada variable adicional que se incluye hay que considerar una especificación del modelo con la variable y otra especificación sin esta. Por lo tanto, siendo k_2 la cantidad de variables en X_2, se terminan estimando 2^{k_2} modelos. Los métodos de ponderación de modelos primero estiman los parámetros, condicionados a cada modelo $\mathcal{M}_i = 1, 2, ..., 2^{k_2}$, y el paso final es presentar los parámetros estimados como sumas ponderadas por los pesos de cada modelo.

Como se ha supuesto que los errores se distribuyen normalmente, la verosimilitud de la muestra, dado un modelo $\mathcal{M}_i$, un vector de parámetros β y una variancia de los errores σ^2, es proporcional a:

$$p(y|\beta, \sigma^2, \mathcal{M}_i) \propto (\sigma^2)^{-n/2}\text{exp}\left\{-\frac{\varepsilon'\varepsilon}{2\sigma^2}\right\} \tag{3.2}$$

Dado que estos parámteros poblacionales se consideran variables aleatorias, la verosimilitud de la muestra también debe considerar las funciones de densidad de estos. Una alternativa es suponer que el vector de coeficientes β se distribuye normalmente, y que la variancia σ^2 se distribuye de acuerdo a una distribución gamma inversa, la cual se adopta en este trabajo. Bajo estos supuestos, la verosimilitud de la muestra y, dado el modelo $\mathcal{M}_i$ es:

$$p(y|\mathcal{M}_i) = \iint p(y|\beta, \sigma^2, \mathcal{M}_i)p(\beta, \sigma^2|\mathcal{M}_i)\ d\beta\ d\sigma^2 \tag{3.3}$$

El cálculo de esta probabilidad se usa para calcular la probabilidad posterior de los modelos, una vez que se observan los datos. En este paso es donde explícitamente se hace uso de la regla de Bayes:

$$p(\mathcal{M}_i|y) = \frac{p(\mathcal{M}_i)p(y|\mathcal{M}_i)}{\sum_{j=1}^{2^{k_2}} p(\mathcal{M}_j)p(y|\mathcal{M}_j)} \qquad i = 1, 2, ..., 2^{k_2} \tag{3.4}$$

Para este cálculo se necesita una probabilidad previa para cada modelo, la cual se debe actualizar dados los datos. La postura inicial que se toma es considerar que todos los modelos tienen una misma probabilidad previa: $p(\mathcal{M}_i) = 2^{-k_2}$.

El objetivo final de la combinación bayesiana de modelos es obtener el mejor estimador de los parámetros del modelo, el cual incorpore la incertidumbre sobre la elección del modelo:

$$E[\beta|y] = \sum_{i=1}^{2^{k_2}} \hat{\beta}(\mathcal{M}_i, y)p(\mathcal{M}_i|y) \tag{3.5}$$

3.2. Estrategia de combinación

La idea de usar métodos bayesianos para ponderar las estimaciones que se realizaron es la de mejorar, con base en criterios estadísticos, las limitaciones de tomar un promedio simple de las estimaciones. Por lo tanto, se busca mejorar una ponderación uniforme, donde el peso asignado a cada uno de los 2^{k_2} modelos es 2^{-k_2}.

En este sentido, se sigue lo establecido por Bassanetti, Caivano & Locarno (2010) en la estrategia de combinación de modelos. El modelo lineal utilizado para obtener los ponderadores de las estimaciones del producto potencial es una curva de Phillips:

$$\pi_t = \underbrace{\gamma_0 + \gamma_1 \pi_{t-1}}_{X_1\beta_1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{5} \gamma_{k+1} x_{t-1}^k}_{X_2\beta_2} \tag{3.6}$$

Donde x_t^k denota la brecha del producto de acuerdo a cada metodología k: $x_t^k = y_t - y_t^{tr,k}$. A partir de lo realizado por De Luca & Magnus (2011) en la aplicación de la ponderación bayesiana de modelos, se extraen las probabilidades de inclusión posteriores pip_k. Esta probabilidad de inclusión resulta de tomar todos los modelos donde aparece la brecha x_{t-1}^k, y sumar las probabilidades posteriores de esos modelos $p(\mathcal{M}_i|y)$. Vale la pena notar que al considerar las probabildades de inclusión posteriores de todas las brechas, no necesariamente suman uno, dado que se cuentan múltiples veces los modelos en

los que se incluye más de una brecha. Por lo tanto, para dar con los pesos finales para la combinación del producto potencial, se reponderan estas probabilidades de inclusión posteriores con el fin de que su suma sea uno:

$$\omega_k = \frac{pip_k}{\sum_{j=1}^{5} pip_j} \tag{3.7}$$

3.3. Resultados

A partir de cada una de las estimaciones de producto potencial se obtiene un valor distinto de esa variable no observable, así como de la brecha del producto. Todas estos cálculos alternativos de la brecha del producto son sometidos a la modelación anteriormente explicada con el fin de validar su potencial explicativo de la inflación y por ende, su factibilidad dentro de la estrategia de combinación. Las distintas series de brecha de producto obtenidas por los diferentes procedimientos se pueden observar gráficamente en el gráfico 3 del anexo 6.1.

De esta forma, se probaron varias curvas de Phillips considerando distintas medidas de inflación, y los resultados del producto potencial ponderado prácticamente no variaron. En el cuadro 4 se pueden observar los valores relativos a las estadísticas obtenidas de las brechas de producto estimadas, desde el peso de cada una en la combinación, como el promedio y otros estadísticos.

Cuadro 4: Resumen de estadísticas de brechas estimadas

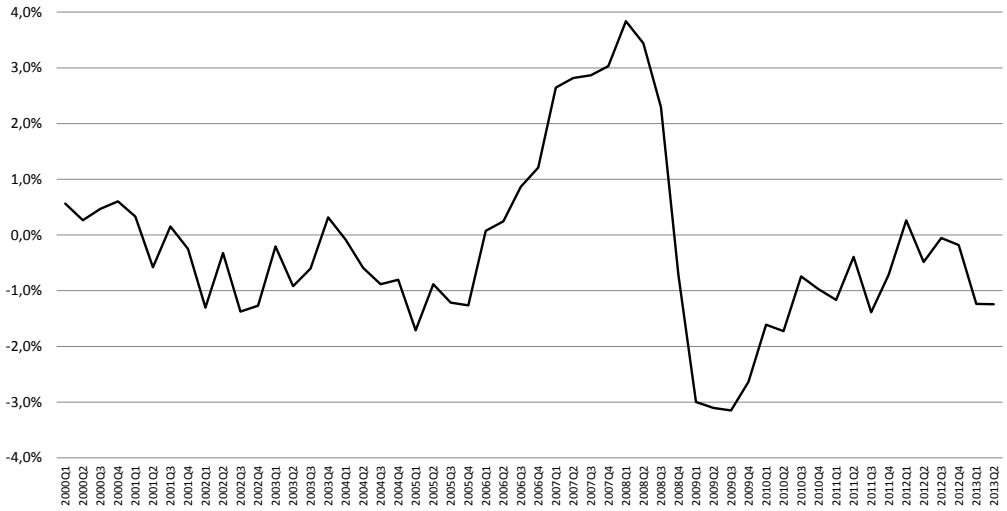
Método	Peso (%)	Promedio	Desv. Est.	Mínimo	Máximo
Beveridge-Nelson	12,86	-0,013	0,021	-0,041	0,042
Función de producción	22,99	-0,003	0,017	-0,034	0,039
Filtro HP	16,88	-0,001	0,016	-0,029	0,042
Filtro de Kalman	33,44	0,000	0,016	-0,033	0,037
VAR estructural	13,83	0,002	0,012	-0,027	0,032
Combinación bayesiana		-0,002	0,016	-0,031	0,038

La medida de inflación que se usa es la Inflación de Media Truncada, que da como resultado un peso de 33,44 % a la estimación por medio del filtro de Kalman, 22,99 % a la estimación por medio de una función de producción, 16,88 % para el filtro Hodrick-Prescott, 13,83 % para el VAR estructural y 12,86 % para la descomposición Beveridge-Nelson.

A partir de estos pesos estimados, se ponderan las distintas brechas obtenidas con el fin de obtener una sola brecha que represente de mejor manera el ciclo económico, en comparación con las distintas

brechas de manera individual. El resultado de esta combinación puede apreciarse en el gráfico 1.

Gráfico 1: Brecha de producto según combinación bayesiana
2000.1-2013.2



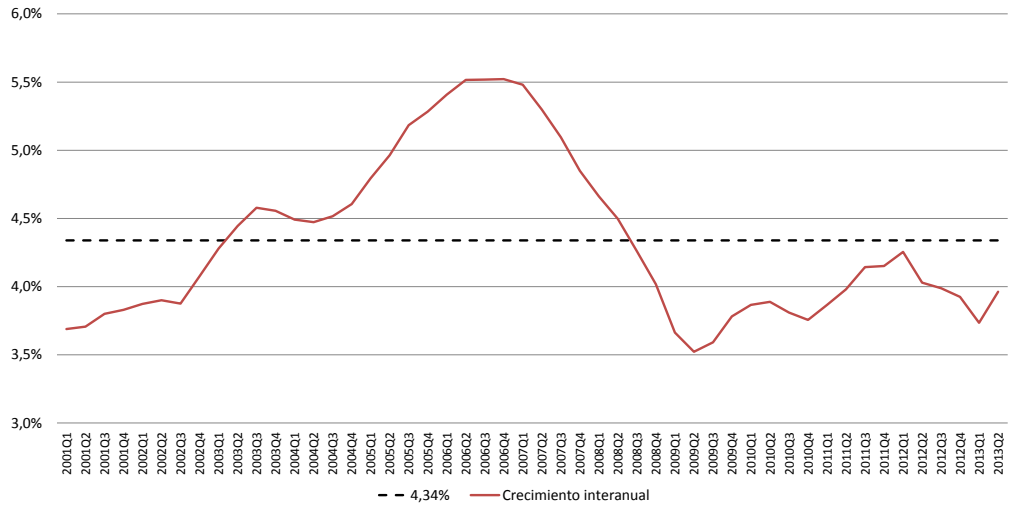
Fuente: Elaboración propia.

De la misma forma, se puede realizar una combinación de los resultados del producto potencial. Se puede esperar que esta estimación del producto potencial, obtenido por medio de esta metodología bayesiana de combinación, sea un mejor indicador de esta variable no observable, en comparación a todas las series obtenidas de manera individual por medio de las distintas metodologías. Este cálculo se puede observar en el gráfico 4 del anexo 6.1, junto al producto observado.

En cuanto al crecimiento de esta serie no observable, su desenvolvimiento se puede analizar de manera detallada en el gráfico 2. Tal y como se puede observar, el promedio de esta serie alrededor de todo el periodo de muestra es 4,34 %, el cual también es plasmado gráficamente.

De manera tal que se pueden establecer tres periodos con relación al nivel de crecimiento imperante. Primeramente, de 2001 a inicios 2003, los valores de crecimiento están por debajo del promedio iniciando en valores apenas superiores a 3,5 % alcanzando el promedio para el final del subperiodo. El segundo subperiodo, se ubica desde 2003 hasta mediados de 2008, en el cual se manifiesta un pico en el crecimiento del producto potencial. Este valor alcanza un máximo ligéramente por encima de 5,5 % a finales de 2006. Finalmente, continuando la caida del crecimiento del producto potencial, se alcanza una cifra de casi 3,5 % en el segundo trimestre de 2009. A partir de ese momento se comienza una

Gráfico 2: Crecimiento producto potencial combinado y su promedio
2001.1-2013.2



Fuente: Elaboración propia.

recuperación, sin sobrepasar aún el promedio para finales de la muestra.

4. Conclusiones

En este documento, se trata de estimar una combinación óptima del producto potencial para la economía costarricense. Además de esto, se realizan algunas estimaciones que no se han utilizado en el pasado para modelar para modelar esta variable no observable de la economía local. Estas estimaciones son la descomposición Beveridge-Nelson, el filtro de Kalman con la especificación miltivariada de Kuttner (1994), o el SVAR.

Junto a las medidas ya empleadas en el BCCR para estimar el producto potencial, es decir, el filtro de Hodrick-Prescott y la función de producción, estas nuevas estimaciones llegan a engrosar la batería de herramientas con las que el formulador de política cuenta para realizar sus inferencias.

Por otro lado, la combinación por medio de métodos bayesianos, empleando la técnica BMA, brinda una valiosa alternativa de combinación de pronósticos frente a la tradicionalmente usada equiponderación de las distintas estimaciones. En este caso, la utilización del criterio bayesiano aplicado a la curva de Phillips, permite obtener las probabilidades, que luego determinan los pesos que los diferentes méto-

dos deben aportar para la serie de producto potencial, por medio de un criterio bayesiano de optimización.

Una particularidad, de esta distribución de pesos, es que los métodos univariados son de los que menos aportan a la amalgama final, de acuerdo al criterio del BMA. Esto son, la descomposición BN y el filtro HP, los cuales aportan 12,83 % y 16,88 % respectivamente. En medio se encuentra el VAR estructural, el cual aporta 13,83 % a la combinación final óptima. A pesar de esto, se debe manifestar que estas cifras no son nada despreciables, por cuanto estos tres métodos suman más del 50 % de manera agregada.

El filtro de Kalman y la función de producción, son los dos métodos que más aportan a esta combinación, siendo que su peso es 33,44 % y 22,99 % respectivamente. Esto deja entrever, que la utilización de métodos multivariados favorece la estimación del producto potencial.

Finalmente, se debe manifestar que la combinación puede realizarse tomando en cuenta más métodos, pudiendo ponderar muchos más de los que aquí se analizaron. Esto, indudablemente permitirá una mayor versatilidad en cuanto a la cantidad de herramientas con las que se pueda valorar el estado del ciclo económico para la economía costarricense, en el futuro, por parte de la Autoridad monetaria.

5. Bibliografía

Referencias

Bassanetti, A., Caivano, M., & Locarno, A. (2010). Modelling Italian potential output and the output gap. Economic working papers 771, Bank of Italy, Economic Research and International Relations Area.

Beveridge, S. & Nelson, C. R. (1981). A new approach to decomposition of economic time series into permanent and transitory components with particular attention to measurement of the 'business cycle'. *Journal of Monetary Economics*, *7*(2), 151–174.

Blanchard, O. J. & Quah, D. (1989). The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances. *American Economic Review*, *79*(4), 655–73.

De Luca, G. & Magnus, J. (2011). Bayesian Model Averaging and Weighted Average Least Squares: Equivariance, Stability, and Numerical Issues. Technical report.

Esquivel, M. & Rojas, M. (2007). Identificación del parámetro de suavizamiento del filtro hodrick-prescott adecuado para el comportamiento cíclico de la actividad económica en costa rica. Serie Notas Técnicas DIE-02-2007-NT, Banco Central de Costa Rica.

Esquivel, M. & Rojas, M. (2008). Estimación del producto potencial para Costa Rica: periodo 1991-2006. In *Estimación y uso de variables no observables en la región*. CEMLA.

Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*.

Hoeting, J. A., Madigan, D., Raftery, A. E., & Volinsky, C. T. (1999). Bayesian model averaging: A tutorial. *Statistical Science*, *14*(4), 382–417.

Kalman, R. E. (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Fluids Engineering*, *82*(1), 35–45.

Kuttner, K. N. (1994). Estimating Potential Output as a Latent Variable. *Journal of Business & Economic Statistics, American Statistical Association*, *12*(3), 361–68.

Magnus, J. R., Powell, O., & Prüfer, P. (2010). A Comparison of Two Model Averaging Techniques with an Application to Growth Empirics. *Journal of Econometrics*, *154*(2), 139–153.

Monge, C. (2012). Estimación de una función de producción para costa rica: 1978-2010. Serie Documentos de Trabajo DEC-DIE-DT-19-2012, Banco Central de Costa Rica.

Segura, C. & Vásquez, J. P. (2011). Estimación del parámetro de suavizamiento del filtro de hodrick y prescott para costa rica. Serie Documentos de Trabajo DEC-DIE-DT-006-2011, Banco Central de Costa Rica.

Watson, M. W. (1986). Univariate detrending methods with stochastic trends. *Journal of Monetary Economics*, *18*(1), 49–75.

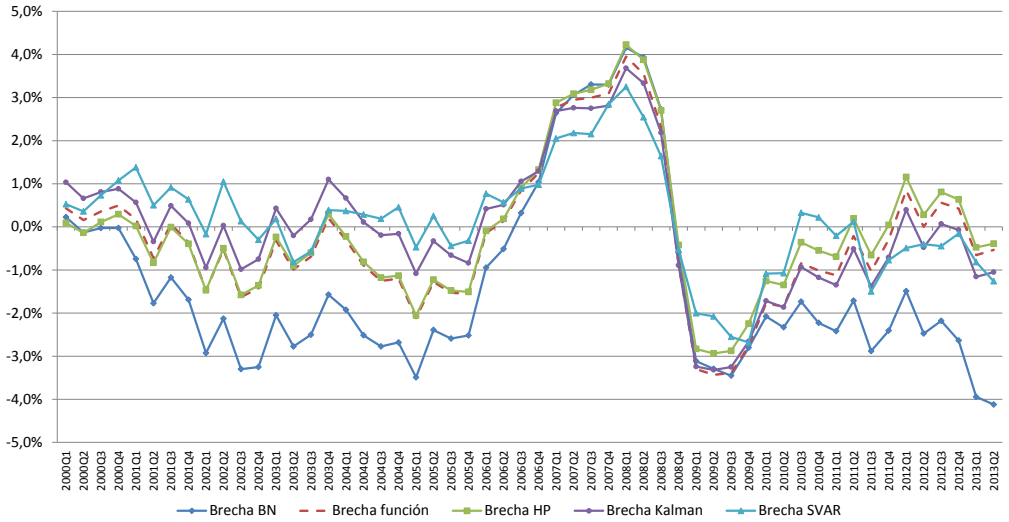
Wintle, B. A., Mccarthy, M. A., Volinsky, C. T., & Kavanagh, R. P. (2003). The use of bayesian model averaging to better represent uncertainty in ecological models. *Conservation Biology*, *17*(6), 1579–1590.

Wold, H. O. (1938). A study in the analysis of stationary time series: Uppsala. *Almqvist and Wicksells*, 214.

6. Anexos

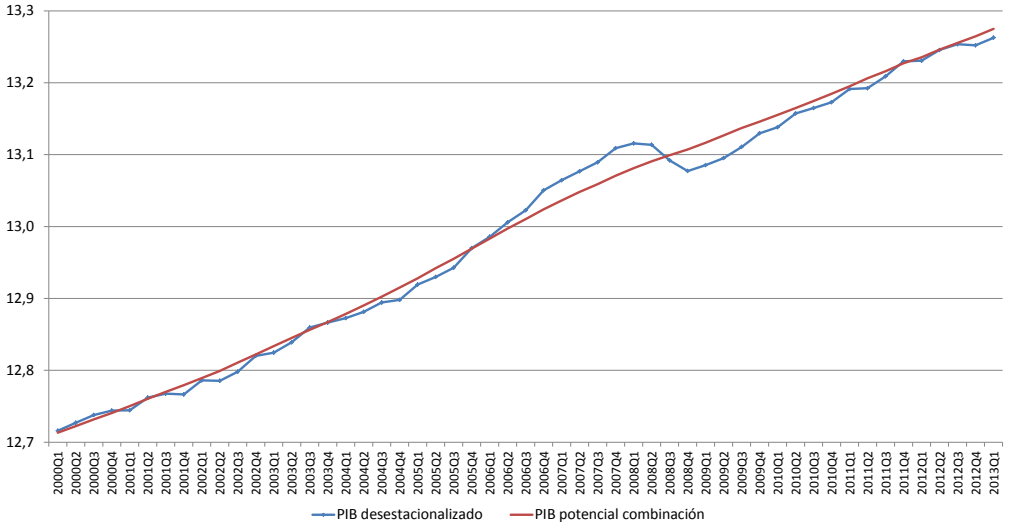
6.1. Gráficos

Gráfico 3: Brechas de producto según las distintas estimaciones 2000.1-2013.2.



Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 4: Producto potencial según combinación bayesiana (en logaritmo natural) 2000.1-2013.2.



Fuente: Elaboración propia.