



DOCUMENTO DE TRABAJO
N.º 01 | 2023

Modelos de pronóstico de la demanda de numerario para Costa Rica

Esteban Méndez

Fotografía de portada: "Presentes", conjunto escultórico en bronce, año 1983, del artista costarricense Fernando Calvo Sánchez. Colección del Banco Central de Costa Rica.

Modelos de pronóstico de la demanda de numerario para Costa Rica

Esteban Méndez¹

Las ideas expresadas en este documento son del autor y no necesariamente representan las del Banco Central de Costa Rica.

Resumen

Esta investigación se dedica al análisis de métodos que permitan pronosticar la demanda de numerario para la economía costarricense, la participación relativa de cada denominación, y el comportamiento del numerario deteriorado. Estos elementos son insumos relevantes para que el Banco Central de Costa Rica pueda cumplir con su función esencial y exclusiva de emitir billetes y monedas de acuerdo con las necesidades reales de la economía nacional.

Para pronosticar la demanda de numerario se compara el desempeño de cinco tipos de modelos: mínimos cuadrados ordinarios (MCO), modelo autorregresivo integrado de medias móviles (ARIMA), modelo de vector de corrección de errores (VECM), modelo de redes neuronales artificiales (RNA) y el método de Holt-Winters.

Respecto a la participación relativa de cada denominación, se recurre al análisis de series de tiempo composicionales, que permiten trabajar con series que representan una proporción, y por ende su suma es igual a la unidad. Para esto, se aplica una transformación del log-cociente aditiva a los datos, para posteriormente implementar un modelo de vectores autorregresivos.

Finalmente, el estudio contempla el análisis de las series de tiempo de numerario deteriorado. Se muestra que las mismas técnicas utilizadas para pronosticar la demanda de numerario pueden ser aplicadas en este caso.

Palabras clave: Demanda por numerario, Modelos de pronóstico, Series de tiempo composicionales, Sistemas de pago.

Clasificación JEL: C53, E41, E42.

¹Departamento de Investigación Económica. División Económica, BCCR. mendezce@bccr.fi.cr.

Se agradece por sus comentarios y sugerencias a Adriana Chacón Soto, Alejandro Rodríguez Solís, Jairo Rodríguez Granados, Juan José Leiva Cortés, Marianne Artavia Solano, Michelle Zúñiga Pineda y Simón Rodríguez Núñez.

Cash Demand Forecast Models for Costa Rica

Esteban Méndez¹

The ideas expressed in this document are those of the author and do not necessarily represent those of the Central Bank of Costa Rica.

Summary

This paper analyzes methods to forecast the cash demand for the Costa Rican economy, the relative participation of each denomination, and the behavior of cash unfit for further circulation. These elements are relevant inputs for the Central Bank of Costa Rica to fulfill its essential and exclusive function of issuing banknotes and coins according to the real needs of the national economy.

To forecast the cash demand, five models are compared: ordinary least squares (OLS), autoregressive integrated moving average model (ARIMA), vector error correction model (VECM), artificial neural network model (RNA), and the Holt-Winters method.

Regarding the relative participation of each denomination, compositional time series are used, which allows working with series that represent a proportion, and therefore their sum is equal to the unit. For this, an additive log-ratio transformation is applied to the data, to later implement an autoregressive vector model.

Finally, the study contemplates the analysis of the time series of unfit cash. It is shown that the same techniques used to forecast the demand for cash can be applied in this case.

Key words: Cash demand, Forecast models, Compositional time series, Payment systems.

JEL Codes: C53, E41, E42.

¹Department of Economic Research. Economic Division, BCCR. mendezce@bccr.fi.cr.

Thanks to Adriana Chacón Soto, Alejandro Rodríguez Solís, Jairo Rodríguez Granados, Juan José Leiva Cortés, Marianne Artavia Solano, Michelle Zúñiga Pineda, and Simón Rodríguez Núñez for helpful comments and discussion.

Índice

1. Introducción	1
2. Estructura del numerario en Costa Rica	5
3. Modelo de estimación de las necesidades de numerario del BCCR	7
4. Modelos de pronóstico de la demanda de numerario	9
4.1. Modelo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO)	10
4.2. Modelo de vector de corrección de errores (VECM)	14
4.3. Modelo autorregresivo integrado de medias móviles (ARI- MA)	16
4.4. Modelo de redes neuronales artificiales (RNA)	18
4.5. Método de Holt-Winters	20
4.6. Comparación de los modelos	22
5. Estimación de la participación relativa de cada denominación	26
6. Estimación de la cantidad de billete deteriorado	30
7. Estimación de la demanda de numerario para fin de año	36
8. Conclusiones	38
A. Anexo. Resultados modelo de mínimos cuadrados ordinarios	47

B. Anexo. Resultados de los modelos de pronóstico a 24 meses	48
C. Anexo. Resultados de los modelos de pronóstico a 36 meses	52
D. Anexo. Comparación de los modelos a 24 y 36 meses	56
E. Anexo. Resultados de los modelos de la participación relativa de cada denominación a 24 meses	58
F. Anexo. Resultados de los modelos de la participación relativa de cada denominación a 36 meses	60
G. Anexo. Cantidad de billetes destruidos por mes	62
H. Anexo. Modelos de pronóstico de billete deteriorado	64
I. Anexo. Estimación de la demanda de numerario para fin de año	75

Modelos de pronóstico de la demanda de numerario para Costa Rica

1. Introducción

La Ley Orgánica del Banco Central de Costa Rica, en su artículo 3, establece como una de las funciones esenciales de esta entidad la emisión de billetes y monedas, de acuerdo con las necesidades reales de la economía nacional. Es por este mandato legal que el Banco Central de Costa Rica (BCCR) se encarga de proveer numerario a la colectividad. Esta función sin embargo no es trivial. Por un lado, una cantidad excesiva de numerario podría derivar en un efecto inflacionario que disminuya su poder adquisitivo. Por otro, un faltante de efectivo circulante puede introducir fricciones a la economía real que causen una pérdida de dinamismo. Asimismo, como elemento inseparable de la emisión de billetes y monedas, está el hecho de que el efectivo debe ser divisible para cumplir a cabalidad su función de medio de pago. Por esto, el BCCR además debe asegurar una adecuada provisión de las distintas denominaciones de billetes y monedas, de forma tal que facilite los intercambios en la economía.

Para cumplir con este mandato legal, y fundamentar de manera técnica las decisiones en este aspecto, el BCCR se ha caracterizado por el análisis de modelos de pronóstico que le permitan estudiar los requerimientos de numerario de la economía costarricense, tanto a nivel agregado como su distribución por denominación (e.g., Azofeifa et al.

1999; Brenes Umaña y Esquivel Monge 2008; Gómez Rodríguez 2015). Este tipo de estudios se actualizan de manera periódica, y el presente documento corresponde a una de dichas actualizaciones.

El documento inicia con una breve descripción de la estructura del numerario en Costa Rica, que se presenta en la Sección 2. A mayo de 2022, esta estructura está conformada por 10 denominaciones, cinco de monedas y cinco de billetes. En la Sección 3 se describe el modelo de estimación de las necesidades de numerario utilizado por el BCCR. Este modelo considera cinco elementos: las existencias en arcas del BCCR, las contrataciones en proceso, un inventario de seguridad para atender contingencias, el comportamiento esperado en la emisión monetaria y la estimación del numerario deteriorado que será destruido. Este documento se concentra en los últimos dos elementos. En particular, en el estudio se identifica el modelo que mejor logra predecir los cambios en la demanda de numerario del país, así como su composición. Además, se estudia el comportamiento de la serie de numerario deteriorado.

En la Sección 4 se analizan y comparan cinco modelos en su desempeño por pronosticar la demanda de numerario. Los modelos corresponden a: mínimos cuadrados ordinarios (MCO), modelo autorregresivo integrado de medias móviles (ARIMA), modelo de vector de corrección de errores (VECM), modelo de redes neuronales artificiales (RNA) y el método de Holt-Winters. La principal conclusión es que, a un horizonte de 12 meses, en predicciones fuera de muestra, el modelo con mejor desempeño es el modelo MCO que incorpora variables exógenas.

Una vez que se obtiene la demanda de numerario, en la Sección 5

se prosigue a analizar la participación relativa de cada denominación. Dado que por construcción la suma de participaciones relativas de cada denominación debe ser igual a uno, se implementa una serie de técnicas conocidas en la literatura como series de tiempo composicionales. La idea principal es realizar una transformación que permita eludir la restricción de que las series sumen uno, y una vez realizado se estima un modelo de Vectores Autoregresivos (VAR) sobre la serie transformada.

Luego de obtener el pronóstico de la emisión monetaria y la participación relativa de cada denominación, el documento analiza en la Sección 6 las series de datos disponibles para la cantidad de numerario deteriorado. Este consiste en el efectivo que por su condición no puede volver a las manos del público. Este análisis se enfoca en el caso de los billetes, que son las denominaciones que con mayor probabilidad regresan al BCCR cuando se deterioran. Se aplican los mismos modelos de pronóstico utilizados en la Sección 4 para cada denominación de billete. En este caso, cuál es el mejor modelo de pronóstico varía de acuerdo con la denominación bajo estudio.

Los modelos de pronóstico de emisión monetaria que se presentan en la Sección 4 tienen otro uso potencial adicional al de servir como insumo para planificar las adquisiciones de numerario por parte del BCCR. Estos modelos permiten también organizar la distribución y entrega de billetes y monedas durante el fin de año, una época que históricamente representa el punto de mayor demanda. Esto se plantea en la Sección 7, donde a partir de datos con frecuencia diaria se estiman modelos de pronóstico que permitan identificar el comportamiento de

la emisión monetaria durante los meses de noviembre y diciembre. Finalmente, el documento concluye en la Sección 8, donde se presentan algunas consideraciones prácticas.

Como se mencionó anteriormente, debido a la importancia de la función de proveer un adecuado nivel de numerario a la economía, el BCCR ha desarrollado con anterioridad estudios que analizan modelos de pronóstico para la demanda de billetes y monedas. Estas investigaciones se actualizan de forma periódica, con el objetivo de incorporar cambios que pueden alterar la estructura de pagos de la sociedad y afectar a la demanda de efectivo, por ejemplo, la mayor presencia de medios de pago electrónicos. Dentro de estos trabajos se puede citar Azofeifa et al. (1999), Brenes Umaña y Esquivel Monge (2008) y Gómez Rodríguez (2015). Todos estos estudios utilizan herramientas de series de tiempo para pronosticar la demanda de numerario. Con excepción del método de Holt-Winters, los estudios anteriores han considerado todos los modelos de pronóstico que el presente documento analiza.

Por otra parte, si bien los estudios antes mencionados incorporan el papel de variables macroeconómicas en los modelos, se basan en los valores observados de dichas variables, y no en las proyecciones que se tenían disponibles al momento de cada pronóstico. En este trabajo se utiliza entonces para la generación de pronósticos fuera de muestra, las proyecciones generadas por el BCCR para sustentar sus documentos analíticos, y que por lo tanto reflejan la mejor información disponible en cada momento. Con esto se pretende dar más realismo en cuanto al escenario en el cual se utilizarán los modelos en la práctica.

Además, los estudios anteriores no consideran el análisis del nume-

rario deteriorado. Como el presente documento muestra, el estudio de este elemento también se puede llevar a cabo a partir de técnicas de series de tiempo.

Más en general, el pronóstico de la demanda de numerario a partir del análisis de series de tiempo, tal y como se realiza en este documento, es un tema de estudio común entre bancos centrales. A manera de ejemplo, se pueden citar documentos realizados por el Banco Central de Chile (Figuroa S. y Pedersen, 2019), el Banco de Inglaterra (Norat, 2008), el Banco de la República - Colombia (Arango-Arango et al., 2004), o el Banco de Noruega (Aastveit y Kjørstad, 2005).

2. Estructura del numerario en Costa Rica

A mayo de 2022, circulan en Costa Rica 10 denominaciones de monedas y billetes, que se detallan en el Cuadro 1. Desde el último trabajo realizado en el BCCR para analizar la demanda de numerario (Gómez Rodríguez, 2015), se han presentado cambios en cuanto a las denominaciones disponibles, por ejemplo, en octubre de 2018 dejó de circular el billete de 50.000 colones (BCCR, 2020a), y desde el 1 de enero de 2020 no se acuñan monedas de cinco colones (BCCR, 2019a).

Asimismo, a partir del 26 de noviembre de 2020, el BCCR puso en circulación nuevos billetes impresos en sustrato de polímero (BCCR, 2020b). Estos nuevos billetes presentan cambios en el diseño, la estructura de seguridad, son más duraderos y al final de su vida útil son reciclables. Respecto a las monedas, desde el 11 de noviembre de 2021 circula una nueva moneda de 500 colones con mejoras en seguridad, y

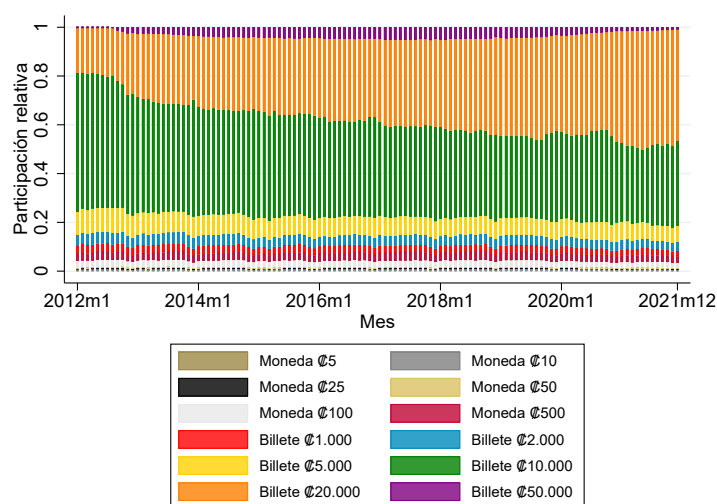
Cuadro 1: Denominaciones circulantes en Costa Rica a mayo de 2022.

Monedas	Billetes
10 colones (₡10)	1.000 colones (₡1.000)
25 colones (₡25)	2.000 colones (₡2.000)
50 colones (₡50)	5.000 colones (₡5.000)
100 colones (₡100)	10.000 colones (₡10.000)
500 colones (₡500)	20.000 colones (₡20.000)

Fuente: Elaboración propia.

que conmemora el bicentenario de la independencia (BCCR, 2021b).

Figura 1: Participación relativa de cada denominación en el valor total de la emisión monetaria, de enero 2012 a diciembre 2021.



Fuente: Elaboración propia.

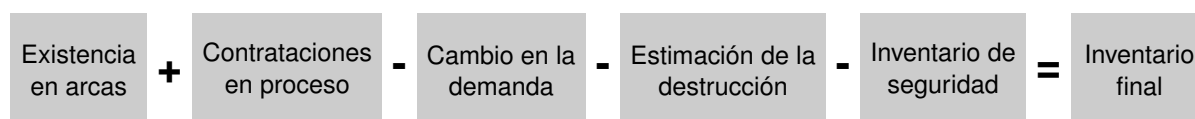
La Figura 1 muestra la participación relativa de cada denominación en el valor total de la emisión monetaria, desde el 2012, año en que el BCCR completa la introducción de la nueva familia de billetes, y sustituye en su totalidad las denominaciones de la serie anterior (BCCR, 2013, p. 60). Mientras que en billetes el mayor porcentaje de la emi-

si3n monetaria lo conforma la denominaci3n de 10.000 colones (40 % en promedio), para monedas es la de 500 colones (2 % en promedio).

3. Modelo de estimaci3n de las necesidades de numerario del BCCR

Dentro del BCCR, el Departamento Emisi3n y Valores es el encargado de las gestiones relativas a determinar y atender las necesidades del numerario (billetes y monedas). Debido al costo y tiempo que conlleva completar una adquisici3n de numerario, y los potenciales riesgos asociados con una incorrecta estimaci3n, se realizan proyecciones con un horizonte de entre uno a cinco a3os. Tal y como lo muestra la Figura 2, el modelo de estimaci3n de las necesidades de numerario del BCCR toma en cuenta cinco elementos.

Figura 2: Modelo de estimaci3n de las necesidades de numerario del BCCR.



Fuente: Elaboraci3n propia.

El primer elemento contempla las existencias de billetes y monedas en las b3vedas del BCCR. El segundo elemento considera las entregas pendientes de recepci3n de contrataciones en ejecuci3n.

El tercer elemento es el cambio en la demanda por efectivo. Este cambio puede obedecer a factores como el crecimiento econ3mico, la inflaci3n, la tasa de inter3s, o la adopci3n de otros medios de pago distintos al efectivo. Estos factores pueden ser muy din3micos, y cam-

biar en el transcurso de pocos años. Por ejemplo, desde el último trabajo al respecto, de Gómez Rodríguez (2015), el uso de medios de pago electrónicos en Costa Rica ha sufrido un incremento considerable. A mediados de 2015 se lanzó Sinpe Móvil, una herramienta que permite transferencias de bajo monto a cuentas en entidades financieras vinculadas a números de teléfono móviles, y que a raíz de la pandemia por COVID-19 en el 2020 vio un incremento de 787 % en el número de transacciones (BCCR, 2021a, p. 101). De igual forma, el uso de tarjetas de crédito y débito se ha profundizado en los últimos años (BCCR, 2021a, p. 108). El dinamismo de esos factores justifica la actualización de los modelos de pronóstico, tarea que lleva a cabo este documento de investigación. En particular, el cambio en la demanda por numerario se analiza en la Sección 4, y la participación relativa de cada denominación en la Sección 5.

El cuarto elemento que considera el modelo de estimación de las necesidades de numerario del BCCR es la destrucción de las unidades que no presentan las condiciones mínimas para circular nuevamente. El presente documento se enfoca en este elemento en la Sección 6, y se plantea el uso de técnicas de pronóstico para obtener estimaciones del comportamiento de la demanda de numerario deteriorado.

Finalmente, el quinto elemento corresponde a un inventario de seguridad, que permite atender fluctuaciones inesperadas en la demanda. Por ejemplo, durante el año 2020, producto de la incertidumbre que generó la pandemia por COVID-19, los agentes económicos mostraron una preferencia por activos líquidos por motivos precautorios, lo que ori-

ginó un incremento imprevisto en la demanda por numerario.¹ De esta manera, la emisión monetaria llegó a representar una cifra equivalente al 4,2 % del producto interno bruto, un nivel no observado desde inicios del nuevo milenio (BCCR, 2021a, p. 94). Este incremento en la demanda se logró atender gracias a la existencia del inventario de seguridad y por acciones de contingencia aplicadas por el BCCR.

4. Modelos de pronóstico de la demanda de numerario

En esta sección se abordan cinco posibles metodologías para pronosticar la demanda total de numerario. Se considera el modelo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO), el modelo de vector de corrección de errores (VECM), el modelo autorregresivo integrado de medias móviles (ARIMA), el modelo de redes neuronales artificiales (RNA) y el método de Holt-Winters. Este último es un aporte adicional de este trabajo, puesto que no ha sido incorporado en las investigaciones anteriores realizadas en este tema por el BCCR. Vale recordar que en esta sección se pronostica la emisión total. Posteriormente, en la Sección 5, se determina la participación relativa de cada denominación.

Para las estimaciones, se utiliza la serie mensual de emisión monetaria (billetes y monedas en circulación emitidos por el BCCR), desde enero de 2012 a abril de 2022. Con el objetivo de evaluar el desempeño de cada modelo de pronóstico fuera de muestra, se excluyen los

¹Este comportamiento no fue exclusivo de Costa Rica. Guttmann et al. (2021) presentan un análisis del caso australiano, y se refieren a cómo la demanda de numerario aumentó de manera considerable durante la crisis sanitaria también en otros países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE).

últimos 12, 24 y 36 meses en las estimaciones. Los resultados que se presentan en esta sección corresponden a las estimaciones que se basan en el periodo desde enero 2012 a abril 2021. Los resultados a 24 y 36 meses se presentan en los Anexos B y C, respectivamente. Se decide considerar la serie de tiempo desde 2012, año en que se completa la introducción de la nueva familia de billetes, y se sustituye todas las denominaciones de la serie anterior (BCCR, 2013, p. 60).

En cada modelo la emisión monetaria se considera de manera nominal, y se analiza la serie después de una transformación logarítmica.

4.1. Modelo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO)

Como primer candidato para un modelo de pronóstico, se plantea una estimación mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO). Se consideran dos especificaciones de este modelo. La primera especificación toma la forma:

$$\ln(\text{Emisión}_t) = \alpha + \beta_m + \beta_T T_t + \varepsilon_t. \quad (1)$$

Donde $\ln(\text{Emisión}_t)$ es el logaritmo de la emisión total nominal en el mes t . α es una constante, β_m son efectos fijos para cada mes del año, lo que permite capturar la estacionalidad del efectivo en circulación, y T es una tendencia lineal que permite, por ejemplo, considerar cómo los avances en otros medios de pago impactan sobre el uso del efectivo.

La segunda especificación que se considera para el MCO incorpora el efecto de variables exógenas en la demanda por numerario. En este caso la especificación corresponde a:

$$\ln(\text{Emisión}_t) = \alpha + \beta_m + \beta_T T_t + \delta \mathbf{X}_t + \varepsilon_t. \quad (2)$$

Donde \mathbf{X}_t es un vector que contiene dichas variables exógenas. En específico, se consideran como variables exógenas el producto interno bruto (PIB), la inflación, las tasas de interés y la dolarización financiera. Las tasas de interés se aproximan mediante la tasa básica pasiva (TBP), mientras que la dolarización financiera con el porcentaje del cuasidinero denominado en dólares. Además, se analizan el PIB y la TBP después de una transformación logarítmica.

Teóricamente estas variables explicarían la demanda por efectivo de los agentes, ya que tanto la inflación como la tasa de interés implican un costo de oportunidad de mantener saldos de efectivo, mientras que el PIB aproxima la utilidad que presenta el efectivo de realizar transacciones en la economía, además de un efecto ingreso. Por otra parte, la dolarización financiera reduciría la demanda por colones.

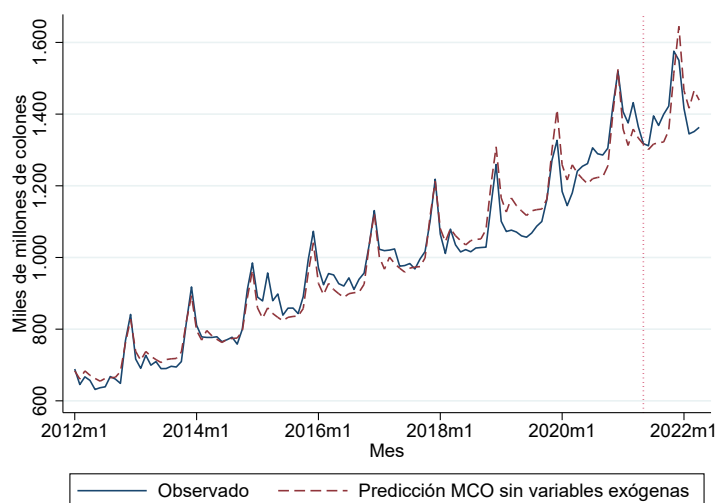
Vale destacar que la permanencia en el modelo de pronóstico final de las variables explicativas consideradas se determina a partir del criterio de información de Akaike con una corrección para tamaños de muestra pequeños (AICc), lo cual permite reducir la posibilidad de sobreajuste.

Otra consideración, dada la naturaleza práctica que se busca con estos modelos de pronóstico, es que idealmente se debería disponer de proyecciones de las variables exógenas que se incluyen en el modelo para el horizonte planteado. Por esto, dichas variables explicativas además de tener un sustento teórico se eligieron en virtud de que se

cuenta con proyecciones que se realizan para el Informe de Política Monetaria (IPM).² Por lo tanto, se podría aprovechar esa información para mejorar la capacidad predictiva del modelo, sin la necesidad de dedicar recursos adicionales para proyectarlas.

Los resultados correspondientes a coeficientes y errores estándar de estimar las especificaciones (1) y (2) se presentan en el Anexo A. En estos resultados se estiman errores estándar Newey-West, que permiten trabajar con estructuras de errores con heterocedasticidad y con presencia de autocorrelación (Newey y West, 1987).

Figura 3: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) sin variables exógenas, a 12 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2021).

Fuente: Elaboración propia.

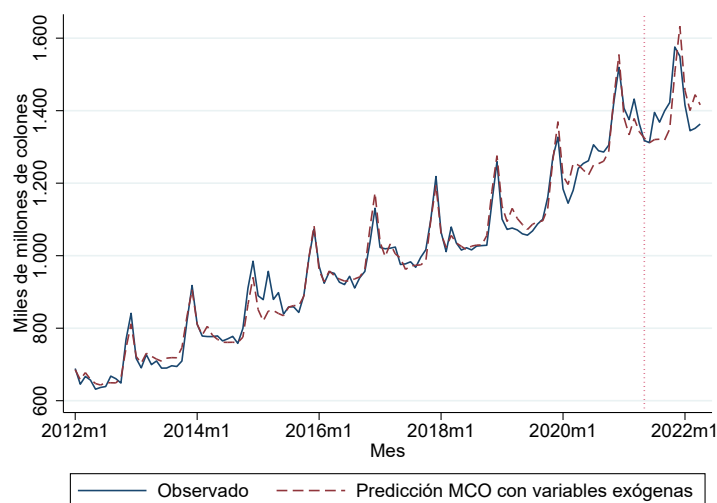
La Figura 3 presenta la comparación entre el pronóstico obtenido mediante el modelo de MCO y la emisión observada, para la especi-

²Que a partir del año 2022 sustituye el Programa Macroeconómico.

ficación (1), a 12 meses. La raíz del error cuadrático medio dentro de muestra es de 0,0363, mientras que fuera de muestra es de 0,0491.³

Por su parte, del conjunto de variables explicativas consideradas para la estimación del modelo de MCO con variables exógenas, el AICc seleccionó la inflación y la TBP. Ambas variables tienen un impacto negativo y estadísticamente significativo sobre la demanda de numerario. Esto tiene un fundamento económico ya que una mayor inflación o tasa de interés incrementa el costo de mantener efectivo, lo que se espera dé lugar a una reducción en su demanda.

Figura 4: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) con variables exógenas, a 12 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2021).

Fuente: Elaboración propia.

La Figura 4 presenta la comparación entre el pronóstico obtenido

³Al presentar los resultados de cada modelo se brinda también información de la raíz del error cuadrático medio, que es una de las medidas más utilizadas para definir la precisión de un pronóstico. Sin embargo, un conjunto más amplio de medidas se presenta en la Subsección 4.6.

mediante el modelo de MCO con variables exógenas y la emisión observada. Para la predicción fuera de muestra se utiliza las proyecciones de las variables exógenas, que, en este caso, para el horizonte de 12 meses, corresponden a las del Programa Macroeconómico 2021-2022 (BCCR, 2021c).

La inclusión de variables exógenas mejora el desempeño del modelo de MCO, en la predicción a 12 meses. En este caso la raíz del error cuadrático medio dentro de muestra es de 0,0271, mientras que fuera de muestra es de 0,0444, ambos menores que los obtenidos en el caso del MCO de la especificación (1).

4.2. Modelo de vector de corrección de errores (VECM)

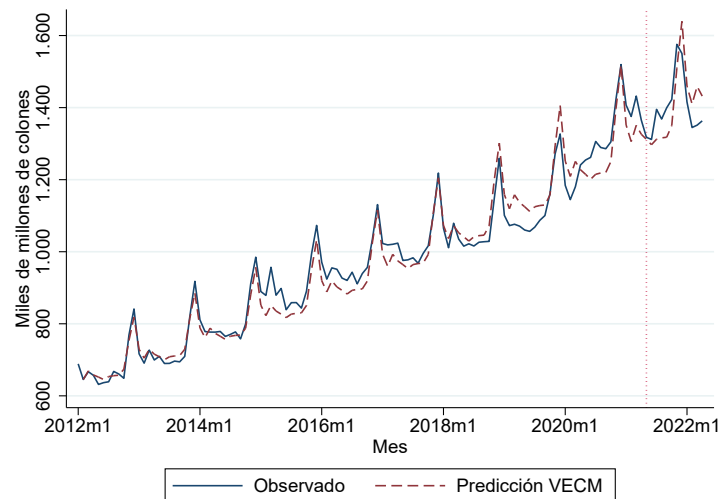
Un segundo candidato para pronosticar la demanda de efectivo es el modelo de vector de corrección de errores, conocido como VECM por sus siglas en inglés (*Vector Error Correction Model*). Este tipo de modelo permite trabajar con series cointegradas, es decir, que comparten una tendencia estocástica en común. El VECM permite reducir la probabilidad de que se establezcan relaciones espurias entre las variables (Lütkepohl, 2005, Capítulo 6).

La estimación del VECM se basa en el mismo conjunto de variables exógenas consideradas en el caso del MCO: PIB, inflación, tasas de interés y dolarización financiera. Asimismo, se incluyen efectos fijos para cada mes del año. Se identifica el número de rezagos para la estimación del modelo, así como el número de relaciones de cointegración, mediante la minimización del criterio de información de Hannan-Quinn

(HQIC). Esto ya que de acuerdo con Lütkepohl (2005, Capítulo 8), seleccionar el rezago que minimice el HQIC provee un estimador consistente del verdadero rezago. Este enfoque también permite determinar de manera consistente el número de relaciones de cointegración (Aznar y Salvador, 2002; Gonzalo y Pitarakis, 1998).

La Figura 5 presenta la comparación entre el pronóstico obtenido mediante el modelo VECM y la emisión observada. La raíz del error cuadrático medio dentro de muestra es de 0,0371, mientras que fuera de muestra es de 0,0485.

Figura 5: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo de vector de corrección de errores (VECM), a 12 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2021).

Fuente: Elaboración propia.

4.3. Modelo autorregresivo integrado de medias móviles (ARIMA)

El tercer candidato que se considera en este estudio para pronosticar la demanda de efectivo es el modelo autorregresivo integrado de medias móviles, también conocido como modelo ARIMA, por sus siglas en inglés (*Autoregressive Integrated Moving Average*) (Hyndman y Athanasopoulos, 2014, Capítulo 8). Este modelo es autorregresivo (AR) puesto que la serie se expresa como una combinación lineal de p rezagos. Asimismo, la serie de tiempo se debe diferenciar al menos d veces para que esta sea estacionaria, es decir, d es su orden de integración (I). Finalmente, la media móvil (MA) se refiere a que la serie se modela como una combinación lineal de errores correspondientes a q períodos precedentes. Dadas estas consideraciones, un proceso ARIMA se denota como $ARIMA(p,d,q)$.

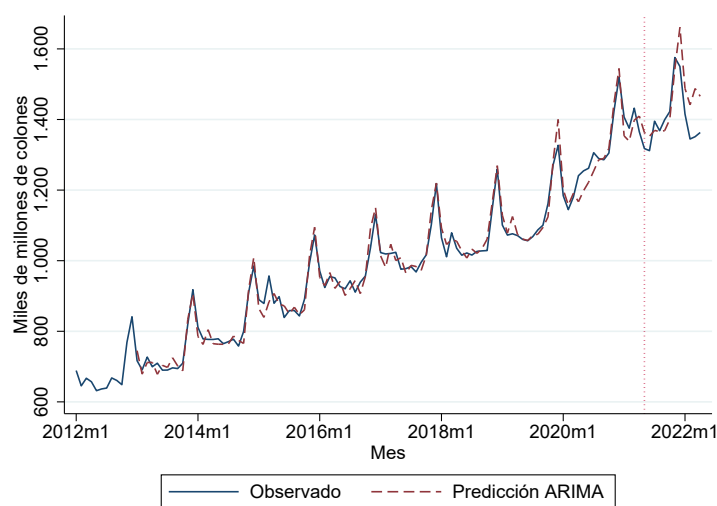
Más en específico, en el presente estudio se utiliza la versión del modelo ARIMA que permite incorporar estacionalidad en la serie, que es una clase de modelos conocidos en la literatura como SARIMA (*Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average*). En ese caso, el proceso se denota como $ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$ (Chatfield, 2000, p. 43-44).

Para fundamentar la elección de los parámetros del ARIMA, se sigue un procedimiento que analiza todas las posibles combinaciones de estos dentro de un rango preestablecido, y se elige la combinación que minimiza el criterio de información de Akaike con una corrección para tamaños de muestra pequeños (AICc). Al excluir los últimos 12 meses para evaluar el desempeño fuera de muestra, este procedimiento arroja

como resultado un modelo ARIMA (1,0,1)(0,1,1)₁₂.⁴

La Figura 6 presenta la comparación entre el pronóstico obtenido mediante el modelo ARIMA y la emisión observada. La raíz del error cuadrático medio dentro de muestra es de 0,0261, mientras que fuera de muestra es de 0,0502.

Figura 6: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo autorregresivo integrado de medias móviles (ARIMA), a 12 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2021).

Fuente: Elaboración propia.

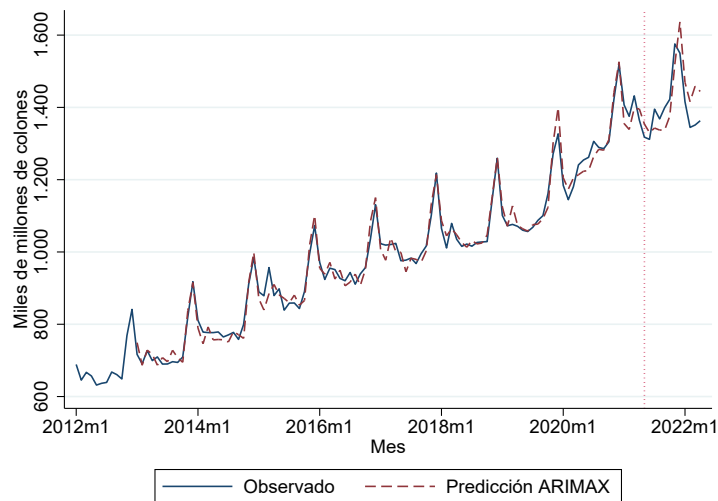
Es posible incluir variables exógenas en la especificación de un modelo ARIMA, lo que comúnmente se le llama un ARIMAX (*Autoregressive Integrated Moving Average with Exogenous Variables*). En línea con las variables exógenas previamente utilizadas para el caso de los modelos MCO y VECM, se considera como variables exógenas el PIB, la inflación, las tasas de interés y la dolarización financiera. Además, se

⁴Al excluir los últimos 24 o 36 meses el procedimiento sugiere un ARIMA (0,1,1)(0,1,1)₁₂.

incluyen efectos fijos para cada mes del año y se utiliza la combinación óptima de parámetros que se encontró para el modelo ARIMA anterior.

La Figura 7 presenta el resultado. La raíz del error cuadrático medio dentro de muestra es de 0,0249, mientras que fuera de muestra es de 0,0443. Nótese que la inclusión de variables exógenas mejora el desempeño del modelo ARIMA, tanto fuera como dentro de muestra.

Figura 7: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo autorregresivo integrado de medias móviles con variables exógenas (ARIMAX), a 12 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2021).

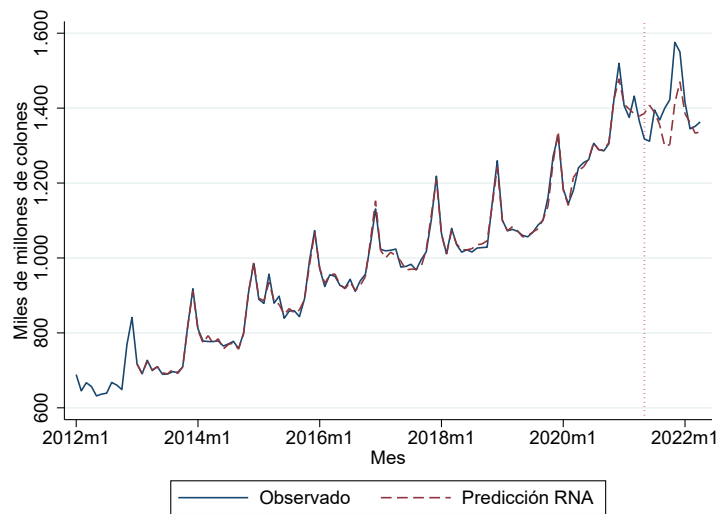
Fuente: Elaboración propia.

4.4. Modelo de redes neuronales artificiales (RNA)

El modelo de redes neuronales artificiales (RNA) es de utilidad al pronosticar variables con un proceso generador de datos desconocido, o no lineal (Choudhary y Haider, 2012). El modelo se inspira en la manera en que el cerebro biológico funciona, mediante una red de

neuronas o unidades procesadoras de información, que se organizan jerárquicamente en capas. De esta manera, un impulso inicial, que corresponde a los datos de entrada, progresivamente se transforma a través de una serie de capas intermedias, hasta obtener una respuesta o resultado final (Cooper, 1999).

Figura 8: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo de redes neuronales artificiales (RNA), a 12 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2021).

Fuente: Elaboración propia.

Cada capa en el modelo recibe un peso, que representa la ponderación que la respuesta de la capa recibe en los procesos subsecuentes. La estimación del modelo consiste entonces en ajustar los pesos correspondientes hasta que la diferencia entre el valor de respuesta pronosticado y el observado sea menor a un rango de tolerancia de error determinado por el investigador. Se recomienda que la cantidad de capas ocultas no sea muy elevada, ya que podría generar sobreajuste y

un mal pronóstico fuera de muestra (Khashei y Bijari, 2010).

Para la estimación del modelo RNA se considera como insumos el rezago a 12 meses de la emisión monetaria, el PIB, la inflación, las tasas de interés, la dolarización financiera, una tendencia lineal y efectos fijos de mes.

La Figura 8 presenta la comparación entre el pronóstico obtenido mediante el modelo RNA y la emisión observada. La raíz del error cuadrático medio dentro de muestra es de 0,0103, mientras que fuera de muestra es de 0,0553.

4.5. Método de Holt-Winters

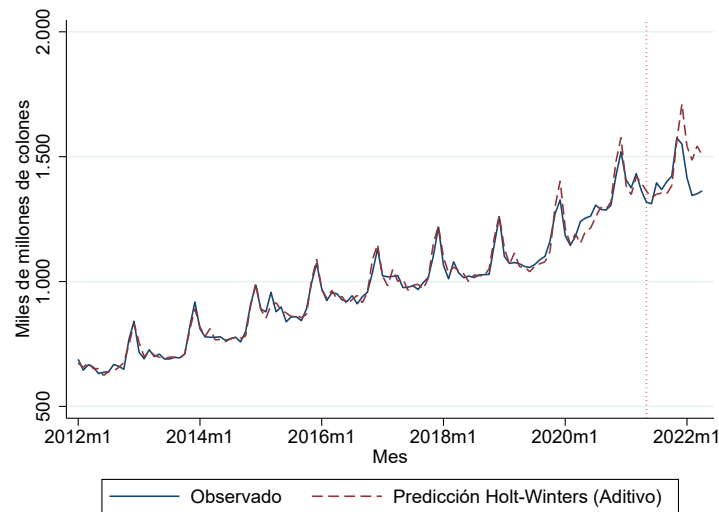
Finalmente, se considera el método de Holt-Winters. Este es un método de suavizamiento exponencial, donde el pronóstico se forma a partir de un promedio ponderado de las observaciones pasadas, con una ponderación que decae de forma exponencial con el tiempo. Además, el método incorpora la presencia de una tendencia y términos estacionales.

Existen dos variantes de este método, que se diferencian en la naturaleza del componente estacional, que se puede incorporar de forma aditiva o multiplicativa. La estacionalidad se dice ser aditiva si esta es aproximadamente constante a lo largo del tiempo; mientras que es multiplicativa si el tamaño de la variación estacional es proporcional al nivel de la serie (Hyndman y Athanasopoulos, 2014, Capítulo 7). Para esta investigación, se consideran ambas variantes. Además, los parámetros de suavizamiento asociados al nivel, tendencia y estacionalidad se eli-

gen de forma tal que minimicen la suma de cuadrados de los errores de pronóstico dentro de muestra.

La Figura 9 presenta la comparación entre el pronóstico obtenido mediante el método de Holt-Winters con un componente aditivo y la emisión observada. La raíz del error cuadrático medio dentro de muestra es de 0,0238, mientras que fuera de muestra es de 0,0702.

Figura 9: Pronóstico de demanda de efectivo con el método Holt-Winters aditivo, a 12 meses.



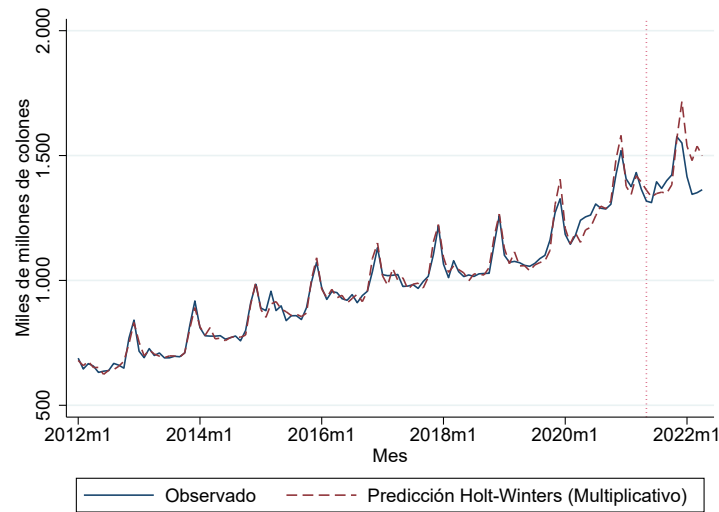
Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2021).

Fuente: Elaboración propia.

Por su parte, la Figura 10 presenta la comparación para el caso del método Holt-Winters con un componente multiplicativo. La raíz del error cuadrático medio dentro de muestra es de 0,0239, mientras que fuera de muestra es de 0,0690. Nótese que según el criterio de la raíz del error cuadrático medio, es preferible incorporar el componente cíclico

de manera multiplicativa, pues mejora el pronóstico fuera de muestra, mientras que mantiene una diferencia relativamente pequeña dentro de muestra.

Figura 10: Pronóstico de demanda de efectivo con el método Holt-Winters multiplicativo, a 12 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2021).

Fuente: Elaboración propia.

4.6. Comparación de los modelos

Luego de estimar los diferentes modelos de pronóstico considerados, se procede a identificar cuál es el que presenta un mejor desempeño. Para esto se utilizan cuatro criterios de selección, que se aplican tanto dentro como fuera de muestra.

Antes de presentar una breve descripción de cada criterio, defina Y_t como la observación correspondiente al periodo t (con $t = 1, \dots, N$), y sea F_t la predicción obtenida para dicha observación. El error de pro-

nóstico, e_t , correspondiente es entonces la diferencia entre el valor observado y el pronosticado, i.e., $e_t = Y_t - F_t$. Los criterios que se presentan a continuación parten de e_t para definir la precisión del pronóstico para cada modelo:

- **Raíz del Error Cuadrático Medio (RECM):** Es una de las medidas más utilizadas en la literatura, y viene dada por la raíz cuadrada del promedio del cuadrado de los errores de pronóstico. Es decir,

$$\text{RECM} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^N e_t^2}{N}}.$$

Esta medida depende de la escala del conjunto de los datos utilizados. Asimismo, puede ser más sensible a valores atípicos que otras medidas dependientes de la escala, como por ejemplo, el Error Absoluto Medio (EAM).

- **Error Absoluto Medio (EAM):** Al igual que el RECM, es una medida dependiente de la escala, muy utilizada en la literatura. El EAM se obtiene como el promedio de los valores absolutos de los errores de pronóstico:

$$\text{EAM} = \frac{\sum_{t=1}^N |e_t|}{N}.$$

- **Error Porcentual Absoluto Medio (EPAM):** Consiste en obtener el promedio de los valores absolutos de los errores porcentuales:

$$\text{EPAM} = \frac{100}{N} \sum_{t=1}^N \left| \frac{e_t}{Y_t} \right|.$$

El EPAM tiene la ventaja de que no es una medida dependiente de la escala, lo que permite comparar el desempeño de los modelos predictivos en diferentes muestras. Sin embargo, tiene el problema de que tiende a infinito conforme Y_t se acerca a cero.

- **Error de Escala Absoluta Media (MASE)**⁵: propuesta por Hyndman y Koehler (2006), viene dada por el promedio de los valores absolutos de los errores de pronóstico, dividido por el promedio del error absoluto de un pronóstico ingenuo. Dicho pronóstico ingenuo consiste en utilizar la última observación como pronóstico de la siguiente observación. Es decir, el MASE viene dado por:

$$\text{MASE} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |e_t|}{\frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N |Y_i - Y_{i-1}|}.$$

El MASE no depende de la escala de los datos utilizados, y no se indefine excepto si toda la serie de datos es idéntica para todos los periodos.

Vale indicar que en el presente estudio, debido a la estacionalidad que muestra la serie de demanda de numerario, el pronóstico ingenuo que se utiliza para estimar el MASE es la observación

⁵Por sus siglas en inglés *Mean Absolute Scaled Error*.

correspondiente a 12 meses antes (Hyndman y Athanasopoulos, 2014, p. 47).

En general, para los cuatro criterios considerados, cuanto menor sea la medida correspondiente, el modelo muestra un mejor desempeño al pronosticar los valores.

Cuadro 2: Comparación de los modelos dentro de muestra - Horizonte: 12 meses.

Modelo	RECM	EAM	EPAM	MASE
MCO sin variables exógenas	0,0363	0,0303	0,1096	0,3644
MCO con variables exógenas	0,0271	0,0205	0,0745	0,2473
VECM	0,0371	0,0309	0,1118	0,3718
ARIMA	0,0261	0,0215	0,0779	0,2588
ARIMAX	0,0249	0,0205	0,0744	0,2472
RNA	0,0103	0,0074	0,0269	0,0896
Holt-Winters (Aditivo)	0,0238	0,0187	0,0676	0,2246
Holt-Winters (Multiplicativo)	0,0239	0,0187	0,0679	0,2256

Nota: Para cada criterio, se indica en **negrita** el modelo con menor medida.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 3: Comparación de los modelos fuera de muestra - Horizonte: 12 meses.

Modelo	RECM	EAM	EPAM	MASE
MCO sin variables exógenas	0,0491	0,0442	0,1579	0,5320
MCO con variables exógenas	0,0444	0,0399	0,1425	0,4800
VECM	0,0485	0,0443	0,1582	0,5330
ARIMA	0,0502	0,0418	0,1494	0,5030
ARIMAX	0,0443	0,0412	0,1472	0,4956
RNA	0,0553	0,0439	0,1569	0,5289
Holt-Winters (Aditivo)	0,0702	0,0568	0,2030	0,6836
Holt-Winters (Multiplicativo)	0,0690	0,0560	0,2002	0,6743

Nota: Para cada criterio, se indica en **negrita** el modelo con menor medida.

Fuente: Elaboración propia.

El Cuadro 2 presenta los resultados obtenidos, para las predicciones

dentro de muestra, a 12 meses. Se concluye que el modelo con mejor desempeño dentro de muestra es el de redes neuronales artificiales (RNA). No obstante, dada la naturaleza de pronóstico que se busca con el ejercicio, también se comparan los modelos fuera de muestra. En ese caso, de acuerdo con los resultados que muestra el Cuadro 3, el MCO con variables exógenas es el que presentan un mejor desempeño en la mayoría de los criterios considerados.

En el Anexo D se muestra la comparación de los modelos para los horizontes de 24 y 36 meses. A un horizonte más largo, de 36 meses, el modelo con mejor desempeño fuera de muestra es el MCO sin variables exógenas. Una explicación para que este modelo más simple prevalezca puede ser que dado que se utilizan los pronósticos realizados para el Programa Macroeconómico 2019-2020 (BCCR, 2019b), la pandemia por COVID-19, que conllevó a un incremento importante en la demanda de numerario, era totalmente inesperada para ese momento. Sin embargo, el segundo lugar también lo posee el MCO, pero con variables exógenas.

5. Estimación de la participación relativa de cada denominación

Una vez que se ha pronosticado el monto total de la emisión monetaria para un horizonte dado, se procede a estimar la distribución de cada denominación. Para esto, es importante considerar que, por construcción, la suma de las participaciones relativas de cada denominación debe ser igual a uno (ver Figura 1).

Es decir, en este caso se cuenta con series de tiempo de componentes no negativos cuya suma total en cada periodo es igual a uno. Si bien los datos corresponden a series de tiempo, las técnicas usuales, como las utilizadas en la Sección 4, no se pueden aplicar directamente, debido a que existe una restricción de que las series deben sumar uno.

Estudios anteriores como Brenes Umaña y Esquivel Monge (2008) o Gómez Rodríguez (2015), si bien han considerado la distribución relativa de cada denominación, no han incorporado explícitamente el hecho de la suma de las participaciones relativas debe ser igual a la unidad. En cambio, Brenes Umaña y Esquivel Monge (2008) realizan las estimaciones para cada denominación por separado, y Gómez Rodríguez (2015) realiza una agrupación que genera una red neuronal para cada denominación, pero sin considerar la restricción de que las participaciones suman uno. En este sentido, un aporte de este trabajo es recurrir a la literatura en series de tiempo composicionales, de forma tal que se atienda directamente la restricción.

Las series de tiempo composicionales son un conjunto de métodos estadísticos que se han desarrollado para el análisis de datos referentes a proporciones. Las series de tiempo composicionales se han aplicado al estudio de diversas ramas del conocimiento, como la geología, la química, las ciencias políticas o la economía. Por ejemplo, estas técnicas permiten pronosticar la participación relativa de empresas en la cuota de producción de un mercado, o el porcentaje de apoyo hacia determinado partido político. Tal y como lo señala Snyder et al. (2017), un componente esencial de las series de tiempo composicionales es aplicar una transformación para que las variables aleatorias sean no

negativas y que sumen uno.

En este caso, la transformación permite eludir la restricción de que las series sumen uno, y una vez realizado ese paso se utilizan las técnicas comunes para el análisis de series de tiempo (Barceló-Vidal et al., 2011). Este es el enfoque que se utilizará en esta investigación, y que ha sido utilizado en estudios como Kynčlová et al. (2015), Boonen et al. (2019) o Vega Baquero y Santolino (2022).

Para introducir el tipo de transformación que se realiza a las series de tiempo composicionales, se sigue a Snyder et al. (2017). Considere que se dispone de $r + 1$ series de tiempo, cada una de longitud N . Cada una de las $r + 1$ series de tiempo se pueden denotar como z_{it} , donde $i = 0, 1, \dots, r$ y $t = 1, \dots, N$. Dado que las series representan proporciones, entonces $z_{it} \geq 0$ y $\sum_{i=0}^r z_{it} = 1 \forall t$.

La idea de los métodos de series de tiempo composicionales es convertir el vector de proporciones \mathbf{z} , de dimensión $r + 1$, a un vector $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$, es decir, se mapean las proporciones a la línea real. Una transformación muy utilizada en la literatura para esta tarea es la del log-cociente aditiva (Aitchison, 1986), que viene dada por: $y_i = \ln \left(\frac{z_i}{z_0} \right)$ para $i = 1, \dots, r$, donde z_0 es una serie base.⁶

Dada esta transformación, se puede aplicar al vector \mathbf{y} y las técnicas usuales para el análisis de serie de tiempo. Finalmente, las series se pueden volver a expresar en términos de proporciones al aplicar la función inversa de la transformación del log-cociente aditiva, que corres-

⁶Note que un potencial problema se podría presentar con esta transformación si algún elemento del vector \mathbf{z} es cero. Sin embargo, ese no es el caso con la distribución de las denominaciones de numerario.

ponde a la función logística:

$$z_i = \begin{cases} \frac{\exp(y_i)}{1 + \sum_{j=1}^r \exp(y_j)} & i = 1, \dots, r \\ z_0 = 1 - \sum_{j=1}^r z_j & i = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Vale destacar que, aunque la transformación log-cociente aditiva es de las más utilizadas en la literatura, también existen otras posibilidades, como la transformación log-cociente centrada o la transformación log-cociente isométrica. No obstante, Barceló-Vidal et al. (2011) encuentra pocas diferencias en términos de pronóstico entre las predicciones del log cociente aditivo y otras alternativas.⁷

Para el presente estudio, se toma como categoría de referencia la participación relativa de la moneda de ₡5. Vale destacar que los resultados que se obtienen luego de una transformación log cociente aditiva no dependen de la categoría que se elija de referencia (Aitchison, 2008, p. 15). Una vez que se ha transformado la serie, se estima un modelo de vectores autorregresivos (VAR) sobre la serie transformada. Este modelo VAR incluye el rezago a 12 meses de cada denominación, efectos fijos de mes y una tendencia lineal. Finalmente, la participación relativa pronosticada para cada denominación se obtiene al aplicar la función inversa dada por (3) a los resultados que se derivan del modelo VAR.

Aunque se estiman de maneja conjunta para todas las denominaciones, para mayor claridad en las Figuras 11 y 12 se presentan por separado para billetes y monedas la comparación entre el pronóstico

⁷Aunque los pronósticos no cambian de manera importante, la interpretación de los coeficientes sí varía según la transformación que se utilice.

obtenido mediante las series composicionales y la distribución observada, a un horizonte de 12 meses. Los horizontes de 24 y 36 meses se presentan en los Anexos E y F.

Una vez que se obtiene el pronóstico de las participaciones relativas de esta sección, más los resultados de la Sección 4, es posible derivar la cantidad de monedas y billetes en circulación para cada periodo deseado.

6. Estimación de la cantidad de billete deteriorado

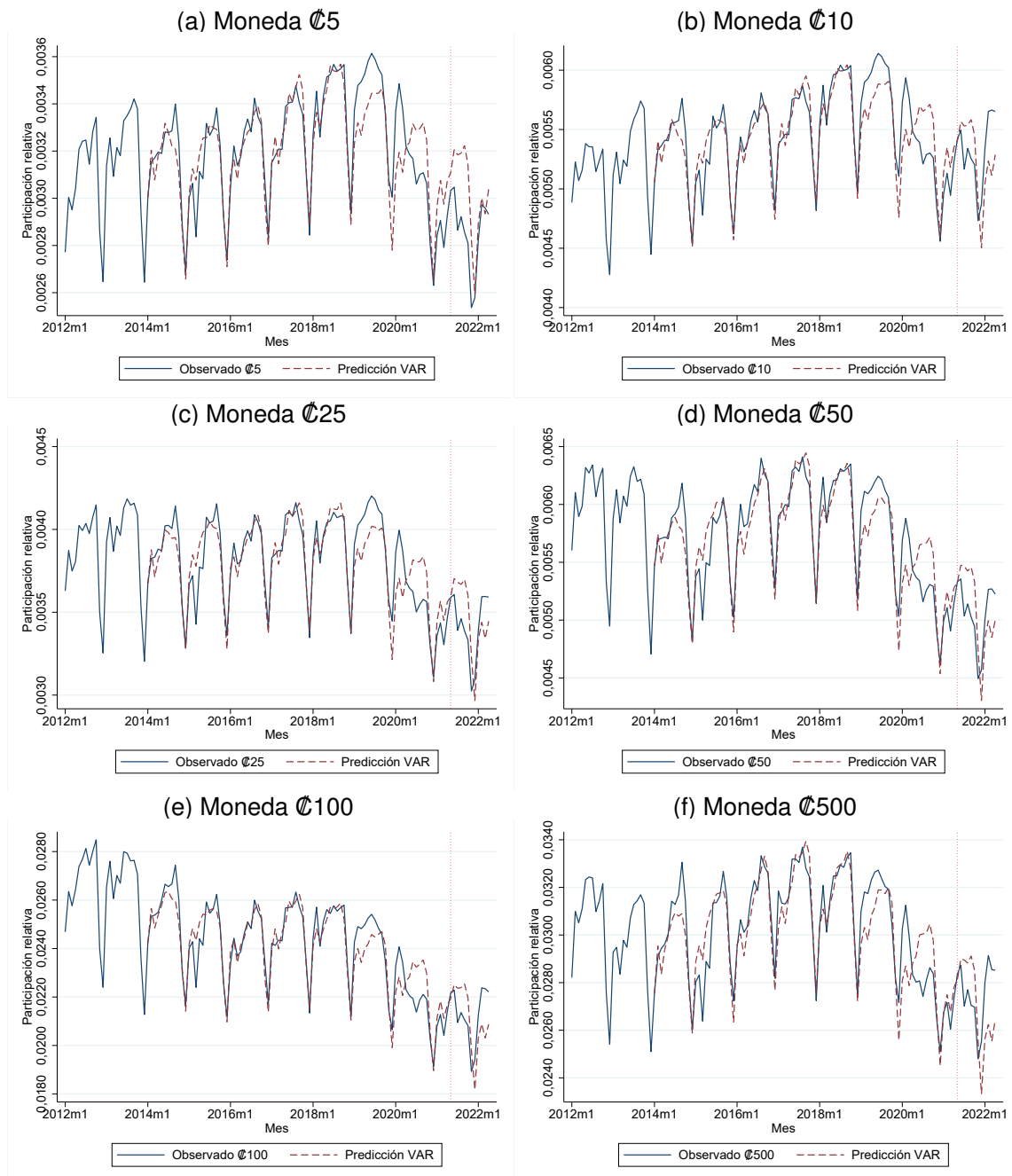
Como se detalló en la Sección 3, el modelo de estimación de las necesidades de numerario del BCCR incorpora como uno de sus elementos la destrucción del efectivo que por su condición no puede volver a circulación. Este elemento no ha sido considerado en estudios anteriores del BCCR relacionados a pronósticos de numerario, los cuales se enfocan en la emisión monetaria total y la participación relativa de cada denominación. Por lo tanto, un aporte adicional del presente trabajo es realizar un análisis de las series de numerario deteriorado.

Una aclaración relevante es que las estimaciones de esta sección se centran en el caso de los billetes, que son las denominaciones que con mayor probabilidad retornan al BCCR debido a su mal estado. Las monedas por su parte regresan en menor cuantía al BCCR, en especial si son de baja denominación.⁸

Además, se considera la información relativa a billete deteriorado en

⁸Méndez-Chacón (2021) recopila las ventajas y desventajas de no acuñar monedas de baja denominación, y enmarca dicha discusión en el caso particular de la moneda de 5 colones de Costa Rica.

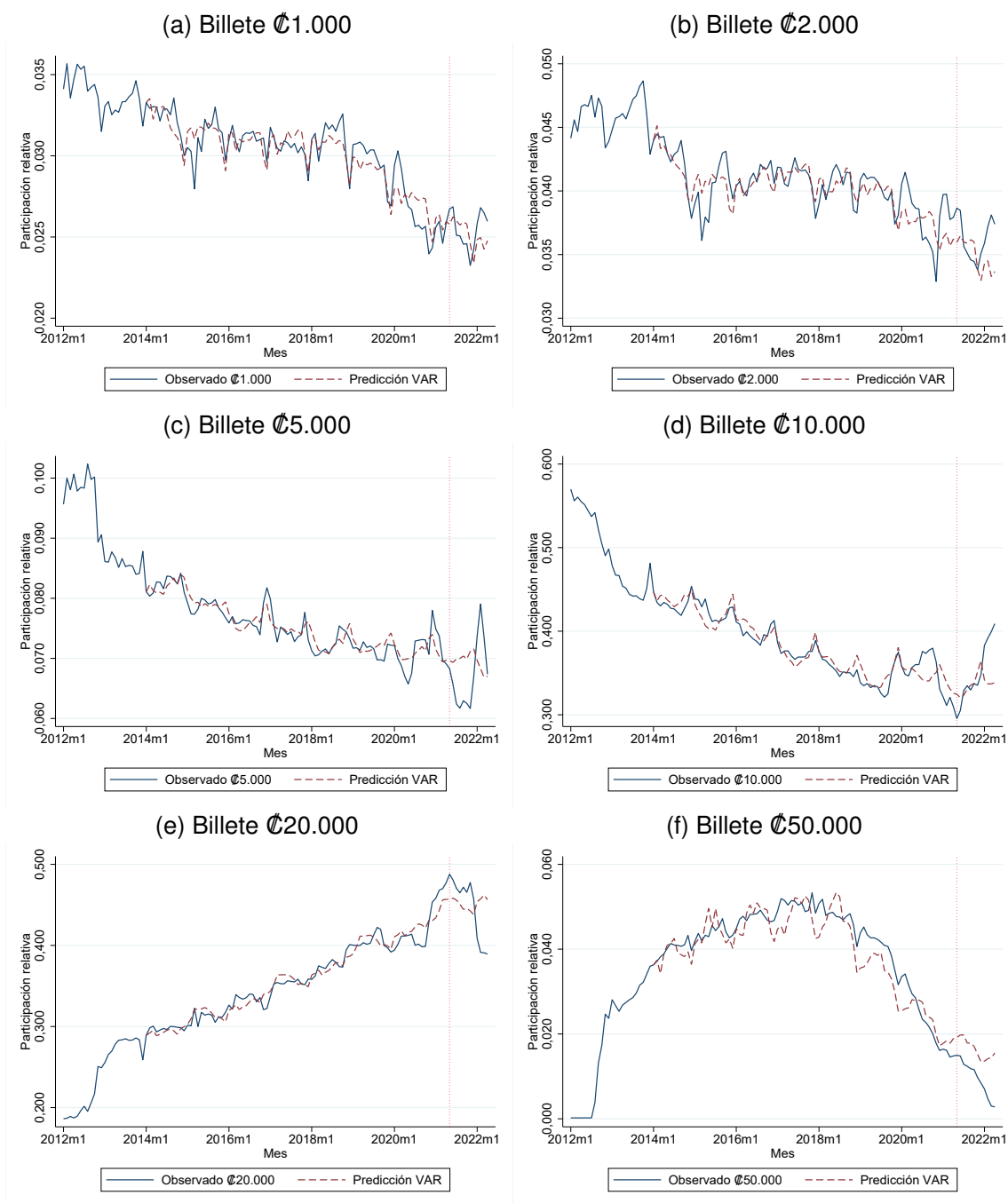
Figura 11: Pronóstico de participación relativa de monedas, a 12 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2021).

Fuente: Elaboración propia.

Figura 12: Pronóstico de participación relativa de billetes, a 12 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2021).

Fuente: Elaboración propia.

lugar del destruido. Esta elección se consideró más conveniente para los efectos prácticos que busca el ejercicio, ya que en ocasiones el Departamento Emisión y Valores espera hasta que la cantidad de billetes deteriorado llegue a determinado umbral antes de destruir el lote. En otras ocasiones, la máquina con la que se realiza la destrucción se puede encontrar en mantenimiento. Ese tipo de situaciones provoca que se presenten meses de cero destrucciones, aunque ingrese un nivel positivo de numerario deteriorado. Para referencia, y respecto a la nueva familia de billetes que se pone en circulación entre el 2011 y el 2012, en 35 % de los meses que comprende el periodo de enero 2012 a diciembre 2021 no se destruyó ninguna denominación de billete. El Anexo G presenta un mayor detalle de la serie de billete destruido por denominación.

La Figura 13 muestra la serie mensual de billete deteriorado, para cada denominación de la nueva familia de billetes, en millones de colones, del 2012 al 2021. Excepto por la denominación de 50.000 colones, todas las denominaciones presentan un ingreso positivo de unidades deterioradas cada mes. El billete de 50.000 colones presenta la característica de que en 37 % de los meses no se reportaron ingresos de unidades deterioradas, lo cual puede deberse a que por su alto valor respecto a otras denominaciones circulaba con menor ritmo en transacciones económicas cotidianas. Debido a esta particularidad, y a que el billete deja de circular desde octubre de 2018 (BCCR, 2020a), no se

estiman modelos de pronóstico para esta denominación.⁹

Para las demás denominaciones, se consideran los mismos métodos de pronóstico que se presentan en la Sección 4. Para facilitar su exposición, el Anexo H contiene los resultados para cada modelo por denominación, a un horizonte de 12 meses. A manera de resumen, el Cuadro 4 presenta el modelo con mejor precisión fuera de muestra en su pronóstico para el deterioro de cada denominación.

Cuadro 4: Modelo con mejor desempeño fuera de muestra para pronosticar billete deteriorado.

Denominación	Modelo
1.000 colones (₡1.000)	ARIMAX
2.000 colones (₡2.000)	ARIMA
5.000 colones (₡5.000)	MCO con variables exógenas
10.000 colones (₡10.000)	ARIMA
20.000 colones (₡20.000)	MCO sin variables exógenas

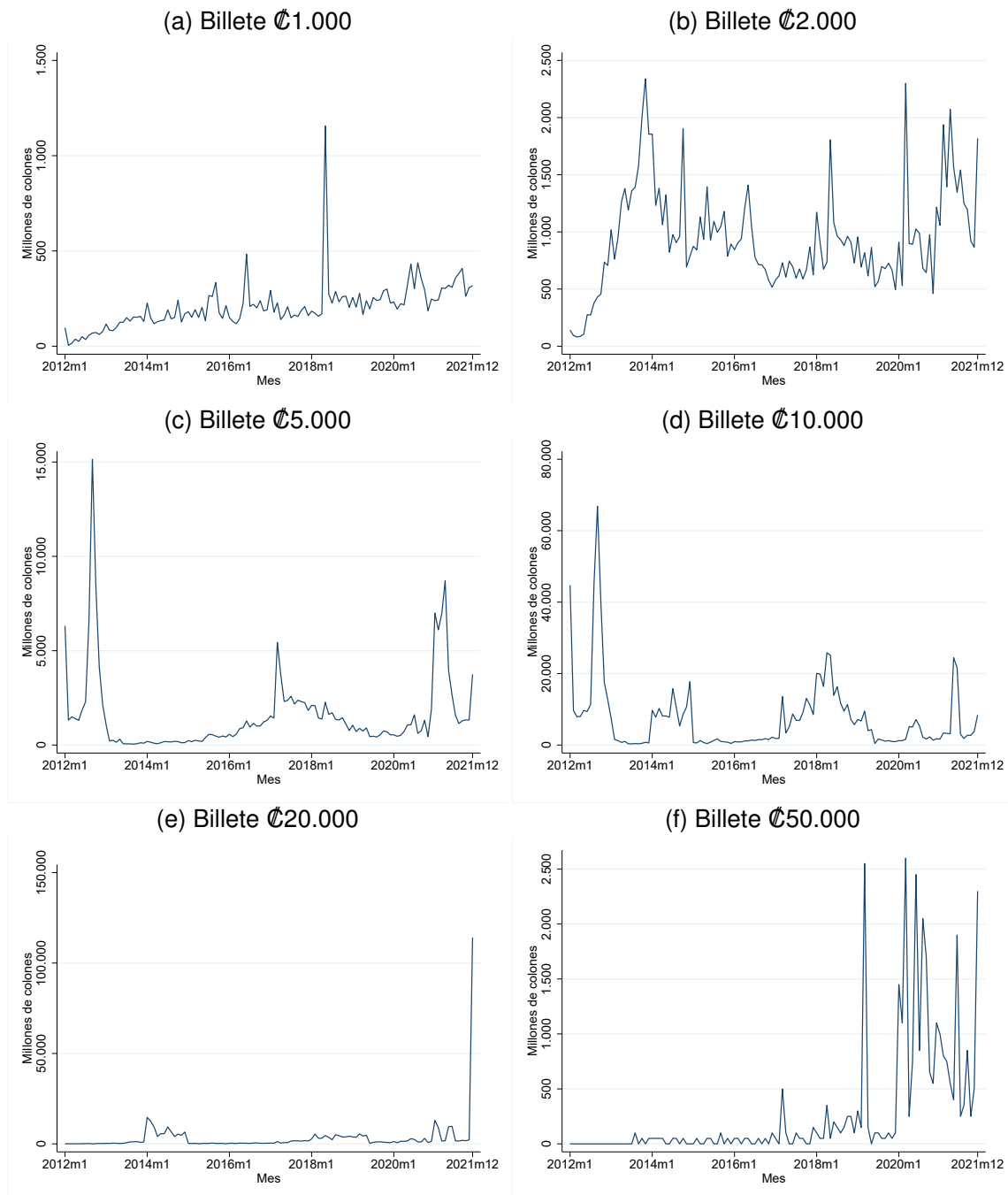
Fuente: Elaboración propia.

Una consideración importante respecto a estas estimaciones es que los billetes impresos en sustrato de polímero, con los cuales a partir del 2020 el BCCR reemplaza los impresos en papel algodón, tienen una durabilidad al menos tres veces mayor a la de los impresos en papel (BCCR, 2022, p. 116). Por lo tanto, es de esperar que con la puesta en circulación de los billetes de polímero se presente un cambio en el comportamiento de los billetes deteriorados.¹⁰ Ante esta situación, se

⁹A futuro, en caso de que se deseara pronosticar el deterioro de una denominación que presente la característica de valores de cero esporádicos, se podría considerar la literatura en series de demanda intermitente (Petropoulos et al., 2022). Igual comentario aplica si se deseara estudiar el comportamiento de la serie de billete destruido.

¹⁰Rush (2015) documenta para Australia cómo con la introducción de billetes impresos en polímero la tasa promedio de destrucción de billetes se redujo de un 5,7% de los billetes en circulación a un 1%.

Figura 13: Cantidad de billetes deteriorados por mes de la nueva familia (en millones de colones), de enero 2012 a diciembre 2021.



Fuente: Elaboración propia.

recomienda reevaluar el desempeño de los modelos de pronóstico considerados en esta sección conforme se disponga de mayor información de la durabilidad de la nueva serie.

7. Estimación de la demanda de numerario para fin de año

Para enfrentar el incremento usual que la demanda por numerario muestra al final de cada año, el Departamento Emisión y Valores se apoya en pronósticos del comportamiento esperado que le permitan organizar el proceso de distribución y entrega de billetes y monedas correspondiente. Los modelos de pronóstico analizados en la Sección 4 no sólo permiten obtener un insumo para estimar las necesidades de adquisición de numerario del BCCR, sino que las mismas herramientas se pueden aplicar para pronosticar la demanda de numerario que se esperaría a final de cada año. De manera similar que el caso de la destrucción del efectivo que por su condición no puede volver a circulación (Sección 6), los estudios anteriores del BCCR relacionados a pronósticos de numerario no han incorporado este tipo de ejercicio.

Para realizar estos pronósticos, se dispone de información relativa a la emisión monetaria con frecuencia diaria, que abarca desde el 1 de enero de 2012 al 31 de octubre de 2022. El pronóstico que se desea obtener es el comportamiento de los últimos 61 días del año (del 1 de noviembre al 31 de diciembre).

Al igual que en las Secciones 4 y 6, se consideran como variables exógenas el PIB, la inflación, las tasas de interés y la dolarización finan-

ciera. Asimismo, la disponibilidad de datos de emisión diaria permite someter a consideración como variables exógenas el día de la semana, la semana del año, si es un día feriado,¹¹ o la fecha de pago de aguinaldo para los empleados del sector público.

Para evaluar el desempeño fuera de muestra, se estima cada modelo sin considerar los últimos 61 días de información disponible (es decir, del 1 de setiembre al 31 de octubre del 2022). El Cuadro 5 presenta el desempeño de cada modelo fuera de muestra, de donde se puede concluir que el modelo de redes neuronales artificiales (RNA) presenta el menor error en cada criterio considerado.¹² Por su parte, la Figura 14 presenta la comparación entre el pronóstico obtenido mediante el RNA

¹¹Respecto a los días feriados, se consideran los siguientes:

- 1 de enero (año nuevo).
- Jueves y Viernes Santos.
- Conmemoración de la Batalla de Rivas (11 de abril).
- Día del trabajador (1 de mayo).
- Anexión del Partido de Nicoya a Costa Rica (25 de julio).
- Día de la Virgen de los Ángeles (2 de agosto).
- Día de la madre (15 de agosto).
- Día de la Persona Negra y la Cultura Afrocostarricense (31 de agosto) - Desde el 2022.
- Día de la independencia (15 de setiembre).
- Día de las culturas (12 de octubre) - Hasta el 2019.
- Día de la abolición del ejército costarricense (1 de diciembre) - Desde el 2020.
- Navidad (25 de diciembre).
- Víspera de año nuevo (31 de diciembre).

Con excepción de la Víspera de año nuevo (31 de diciembre), todos los días anteriores se reconocen como feriados en el artículo 148 del Código de Trabajo. En los casos pertinentes, se considera el día en el cual se trasladó el disfrute del feriado. Esto es relevante en especial a raíz de la Ley N° 9875 del 13 de julio del 2020, la cual dispone trasladar temporalmente el disfrute de algunos feriados.

¹²El Anexo I contiene el desempeño de cada modelo dentro de muestra.

y la emisión observada diaria.¹³

Cuadro 5: Comparación fuera de muestra de los modelos para pronosticar la demanda de numerario para fin de año.

Modelo	RECM	EAM	EPAM	MASE
MCO sin variables exógenas	0,0243	0,0210	0,0750	0,2721
MCO con variables exógenas	0,0406	0,0363	0,1297	0,4710
VECM	0,0247	0,0212	0,0758	0,2753
ARIMA	0,0206	0,0175	0,0625	0,2269
ARIMAX	0,0240	0,0183	0,0656	0,2379
RNA	0,0187	0,0150	0,0535	0,1944
Holt-Winters (Aditivo)	0,0295	0,0246	0,0880	0,3195
Holt-Winters (Multiplicativo)	0,0297	0,0248	0,0886	0,3216

Nota: Para cada criterio, se indica en **negrita** el modelo con menor medida.

Fuente: Elaboración propia.

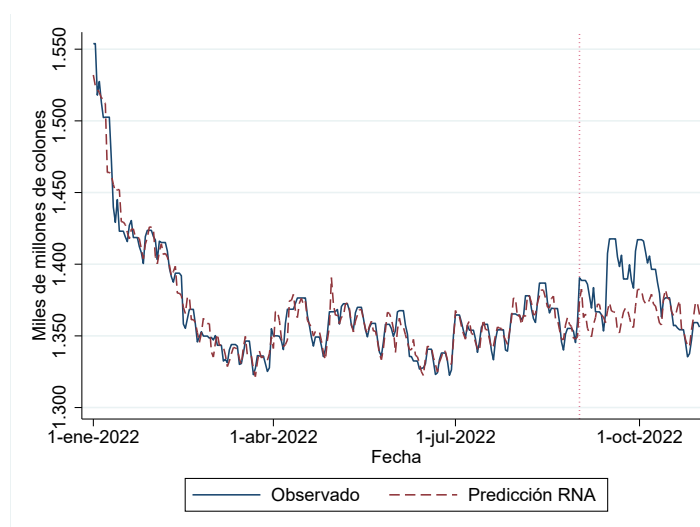
8. Conclusiones

Este trabajo constituye una actualización de los insumos que fundamentan la gestión del numerario nacional, en lo relativo a su pronóstico, participación relativa por denominación, y el comportamiento del deterioro.

En aras de su implementación práctica, es importante tener en consideración tres aspectos. Primero, dado que la información utilizada abarca hasta abril del 2022, es posible que los resultados estén influenciados por el aumento inesperado de la emisión monetaria que se dio a raíz de la pandemia por COVID-19. Debido a la incertidumbre sobre la

¹³Para mayor claridad la figura restringe la comparación al 2022. No obstante, el modelo se estima con información desde el 2012. En el Anexo I se muestra la comparación respecto a toda la muestra utilizada, para cada uno de los modelos estimados.

Figura 14: Pronóstico de demanda de efectivo para fin de año con un modelo de redes neuronales artificiales (RNA), a 61 días.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (31 de agosto de 2022).

Fuente: Elaboración propia.

duración o la magnitud de la crisis sanitaria, los agentes incrementaron su tenencia de activos líquidos. Esto provocó que la emisión monetaria fuera superior respecto a los niveles mostrados en años anteriores. Conforme se retorne a la normalidad, es posible que la capacidad de pronóstico de los modelos cambie, y por ende su desempeño relativo. Para responder de manera ágil a dicho cambio, es importante seguir de cerca los criterios de selección antes planteados.

El segundo aspecto por considerar es respecto al cambio a billetes impresos en sustrato de polímero. Este material es más resistente que el impreso en papel algodón, y es probable que la dinámica de billete deteriorado varíe. Esto también sugiere la necesidad de dar seguimiento al desempeño de los modelos de pronóstico planteados para tal fin.

Finalmente, si bien estudios anteriores han encontrado que los modelos de series de tiempo superan las predicciones basadas meramente en criterio experto, no se puede subestimar la importancia de este último (Norat, 2008; El Hamiani Khatat, 2018). El criterio experto puede desempeñar una función relevante al considerar factores excepcionales o información no incorporada en los modelos. Por ejemplo, el retiro de circulación de los billetes de 50.000 colones en el 2018 provocó un cambio en la dinámica de la participación relativa de las denominaciones, inesperada desde el punto de vista del modelo, pero ante la cual se debe reaccionar para atender de manera adecuada las necesidades de numerario de la economía.

Referencias bibliográficas

- Aastveit, K. y Kjørstad, T. (2005). Norges bank's management of cash inventories. *Economic Bulletin*, 06(2).
- Aitchison, J. (1986). *The Statistical Analysis of Compositional Data*. Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman and Hall.
- Aitchison, J. (2008). The single principle of compositional data analysis, continuing fallacies, confusions and misunderstandings and some suggested remedies. En Daunis-i Estadella, J. y Martín-Fernández, J., editors, *Proceedings of CODAWORK'08, The 3rd Compositional Data Analysis Workshop*. University of Girona, Girona (Spain).
- Arango-Arango, C., Misas A., M., y Hernández, J. (2004). La demanda de especies monetarias en Colombia: estructura y pronóstico. Borradores de Economía; No. 309.
- Aznar, A. y Salvador, M. (2002). Selecting the Rank of the Cointegration Space and the Form of the Intercept Using an Information Criterion. *Econometric Theory*, 18(4):926–947.
- Azofeifa, A., Sancho, B., Solís, L., y Zúñiga, M. (1999). Propuesta metodológica para estimar el tamaño de un pedido de billetes para la economía costarricense. *Documento de Trabajo, Banco Central de Costa Rica, DEMI-DIE-PI-01-99/R*.
- Barceló-Vidal, C., Aguilar, L., y Martín-Fernández, J. (2011). Compositional VARIMA Time Series. En Pawlowsky-Glahn, V. y Buccianti, A.,

editors, *Compositional Data Analysis: Theory and Applications*, capítulo 7, páginas 87–103. Wiley.

BCCR (2013). Banco Central de Costa Rica. Memoria Anual 2012.

BCCR (2019a). Banco Central de Costa Rica. “Banco Central dejará de acuñar monedas de cinco colones a partir del 1 de enero de 2020.” CP-BCCR-021-2019.

BCCR (2019b). Banco Central de Costa Rica. “Programa Macroeconómico 2019-2020.” Enero 2019.

BCCR (2020a). Banco Central de Costa Rica. “BCCR recuerda que dejó de emitir el billete de ₡50.000 desde el año 2018.” CP-BCCR-021-2020.

BCCR (2020b). Banco Central de Costa Rica. “Nuevos billetes impresos en sustrato de polímero circularán a partir del 26 de noviembre.” CP-BCCR-036-2020.

BCCR (2021a). Banco Central de Costa Rica. Memoria Anual 2020.

BCCR (2021b). Banco Central de Costa Rica. “Nueva moneda de ₡500, conmemorativa del Bicentenario, circulará a partir de este jueves.” CP-BCCR-040-2021.

BCCR (2021c). Banco Central de Costa Rica. “Programa Macroeconómico 2021-2022.” Enero 2021.

BCCR (2022). Banco Central de Costa Rica. Memoria Anual 2021.

- Boonen, T. J., Guillen, M., y Santolino, M. (2019). Forecasting compositional risk allocations. *Insurance: Mathematics and Economics*, 84:79–86.
- Brenes Umaña, H. y Esquivel Monge, M. (2008). Pronóstico de la demanda de numerario en Costa Rica. *Documento de Investigación, Banco Central de Costa Rica*.
- Chatfield, C. (2000). *Time-Series Forecasting*. CRC Press LLC, Boca Raton, Florida.
- Choudhary, M. A. y Haider, A. (2012). Neural network models for inflation forecasting: an appraisal. *Applied Economics*, 44(20):2631–2635.
- Cooper, J. C. B. (1999). Artificial neural networks versus multivariate statistics: An application from economics. *Journal of Applied Statistics*, 26(8):909–921.
- El Hamiani Khatat, M. (2018). Monetary Policy and Models of Currency Demand. IMF Working Papers 2018/028, International Monetary Fund.
- Figueroa S., C. y Pedersen, M. (2019). A system for forecasting Chilean cash demand – the role of forecast combinations. *Economía Chilena*, 22(2):40–68.
- Gómez Rodríguez, J. (2015). Métodos de predicción para la demanda de numerario en Costa Rica. *Serie Documentos de Investigación DI-02-2015, División Económica, Banco Central de Costa Rica*.

- Gonzalo, J. y Pitarakis, J.-Y. (1998). Specification via model selection in vector error correction models. *Economics Letters*, 60(3):321–328.
- Guttman, R., Pavlik, C., Ung, B., y Wang, G. (2021). Cash Demand during COVID-19. *Reserve Bank of Australia. Bulletin. March 2021*.
- Hyndman, R. y Athanasopoulos, G. (2014). *Forecasting: Principles and Practice*. OTexts, Melbourne, Australia.
- Hyndman, R. J. y Koehler, A. B. (2006). Another look at measures of forecast accuracy. *International Journal of Forecasting*, 22(4):679–688.
- Khashei, M. y Bijari, M. (2010). An artificial neural network (p,d,q) model for timeseries forecasting. *Expert Systems with Applications*, 37(1):479–489.
- Kynčlová, P., Filzmoser, P., y Hron, K. (2015). Modeling Compositional Time Series with Vector Autoregressive Models. *Journal of Forecasting*, 34(4):303–314.
- Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer, Berlin.
- Méndez-Chacón, E. (2021). Implicaciones sobre la inflación de no acuñar la moneda de 5 colones. *Documento de Investigación, Banco Central de Costa Rica*.
- Newey, W. K. y West, K. D. (1987). A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica*, 55(3):703–708.

Norat, M. A. (2008). *Forecasting banknotes*. Centre for Central Banking Studies, Bank of England.

Petropoulos, F., Apiletti, D., Assimakopoulos, V., Babai, M. Z., Barrow, D. K., Ben Taieb, S., Bergmeir, C., Bessa, R. J., Bijak, J., Boylan, J. E., Browell, J., Carnevale, C., Castle, J. L., Cirillo, P., Clements, M. P., Cordeiro, C., Cyrino Oliveira, F. L., De Baets, S., Dokumentov, A., Ellison, J., Fiszeder, P., Franses, P. H., Frazier, D. T., Gilliland, M., Gönül, M. S., Goodwin, P., Grossi, L., Grushka-Cockayne, Y., Guidolin, M., Guidolin, M., Gunter, U., Guo, X., Guseo, R., Harvey, N., Hendry, D. F., Hollyman, R., Januschowski, T., Jeon, J., Jose, V. R. R., Kang, Y., Koehler, A. B., Kolassa, S., Kourentzes, N., Leva, S., Li, F., Litsiou, K., Makridakis, S., Martin, G. M., Martinez, A. B., Meeran, S., Modis, T., Nikolopoulos, K., Önkal, D., Paccagnini, A., Panagiotelis, A., Panapakidis, I., Pavía, J. M., Pedio, M., Pedregal, D. J., Pinson, P., Ramos, P., Rapach, D. E., Reade, J. J., Rostami-Tabar, B., Rubaszek, M., Sermpinis, G., Shang, H. L., Spiliotis, E., Syntetos, A. A., Talagala, P. D., Talagala, T. S., Tashman, L., Thomakos, D., Thorarinsdottir, T., Todini, E., Trapero Arenas, J. R., Wang, X., Winkler, R. L., Yusupova, A., y Ziel, F. (2022). *Forecasting: theory and practice*. *International Journal of Forecasting*.

Rush, A. (2015). *The Life of Australian Banknotes*. RBA Research Discussion Papers No 2015-10, Reserve Bank of Australia.

Snyder, R. D., Ord, J. K., Koehler, A. B., McLaren, K. R., y Beaumont,

A. N. (2017). Forecasting compositional time series: A state space approach. *International Journal of Forecasting*, 33(2):502–512.

Vega Baquero, J. D. y Santolino, M. (2022). Too big to fail? An analysis of the Colombian banking system through compositional data. *Latin American Journal of Central Banking*, 3(2):100060.

A. Anexo. Resultados modelo de mínimos cuadrados ordinarios

La columna (1) del Cuadro A.1 presenta los resultados correspondientes a coeficientes y errores estándar de estimar la especificación de mínimos cuadrados ordinarios sin variables exógenas (especificación (1)), mientras que la columna (2) incluye en el modelo las variables seleccionadas según el criterio de información de Akaike con una corrección para tamaños de muestra pequeños (AICc) (especificación (2)).

Cuadro A.1: Modelo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO), a 12 meses.

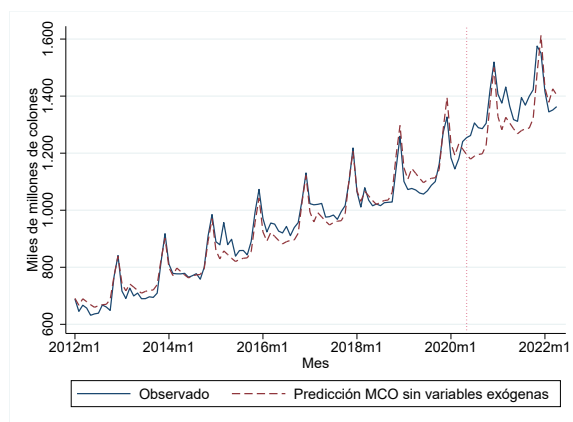
	(1)	(2)
Tendencia	0,0064 (0,0003)***	0,0053 (0,0003)***
Inflación		-0,0088 (0,0025)***
Tasa Básica Pasiva		-0,1034 (0,0363)***
Constante	27,2445 (0,0156)***	27,6312 (0,0736)***
Observaciones	112	112
R^2 Ajustado	0,9690	0,9823

Notas: En paréntesis se presentan los errores estándar robustos según el método Newey-West. Ambos modelos incluyen efectos fijos de mes.

* $p < 0,10$, ** $p < 0,05$, *** $p < 0,01$

B. Anexo. Resultados de los modelos de pronóstico a 24 meses

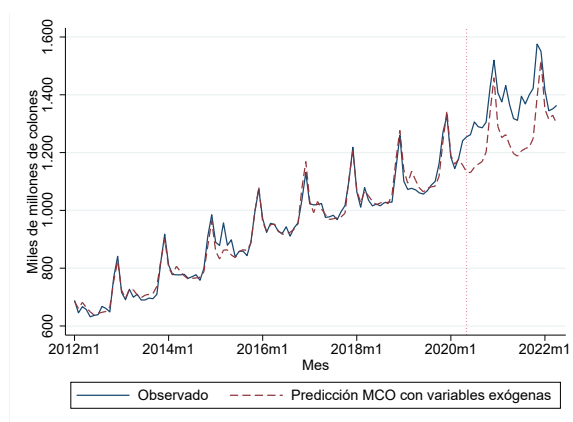
Figura B.1: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) sin variables exógenas, a 24 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2020).

Fuente: Elaboración propia.

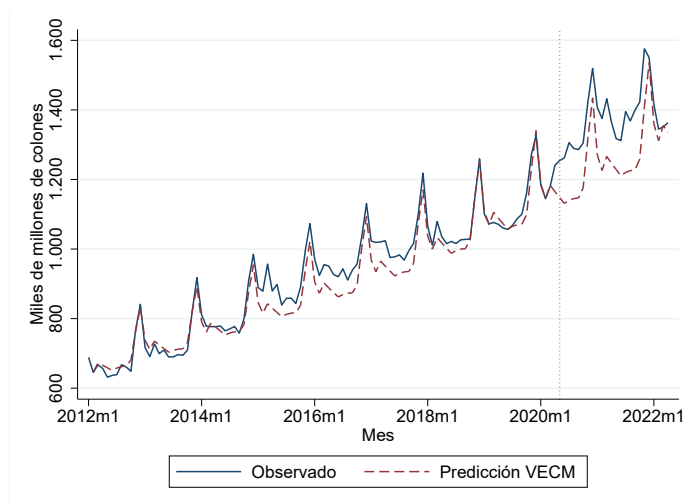
Figura B.2: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) con variables exógenas, a 24 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2020).

Fuente: Elaboración propia.

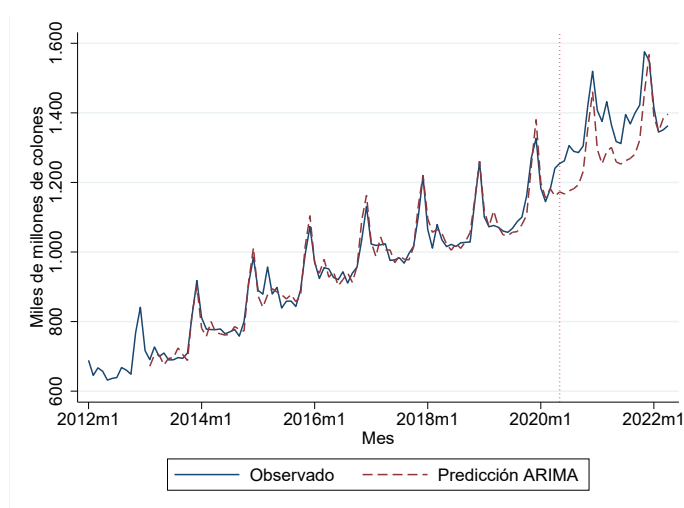
Figura B.3: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo de vector de corrección de errores (VECM), a 24 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2020).

Fuente: Elaboración propia.

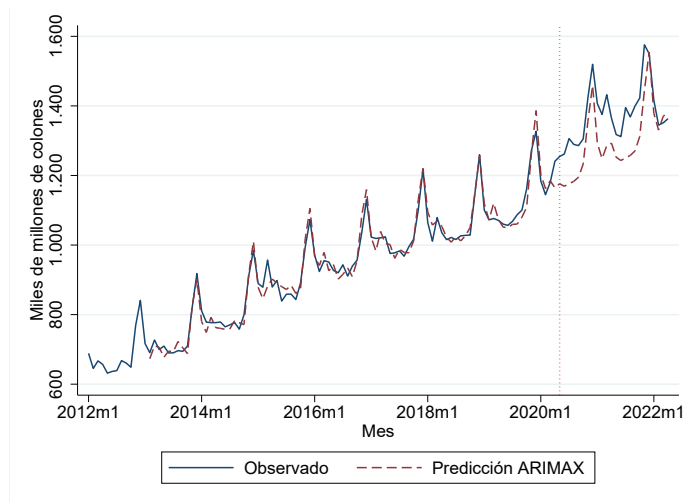
Figura B.4: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo autorregresivo integrado de medias móviles (ARIMA), a 24 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2020).

Fuente: Elaboración propia.

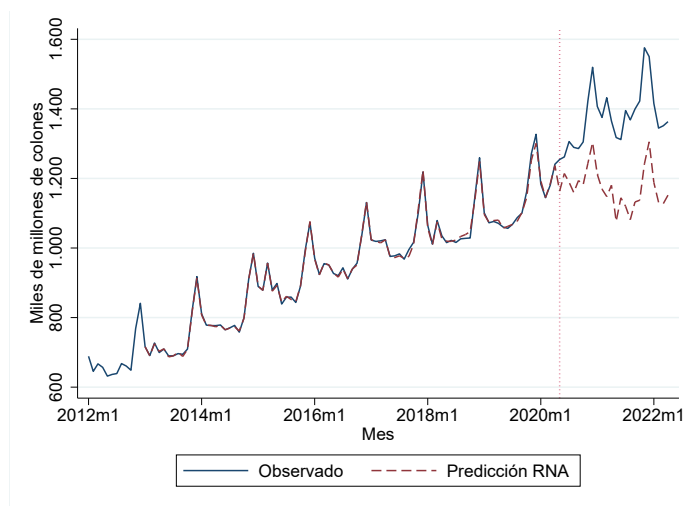
Figura B.5: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo autorregresivo integrado de medias móviles con variables exógenas (ARIMAX), a 24 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2020).

Fuente: Elaboración propia.

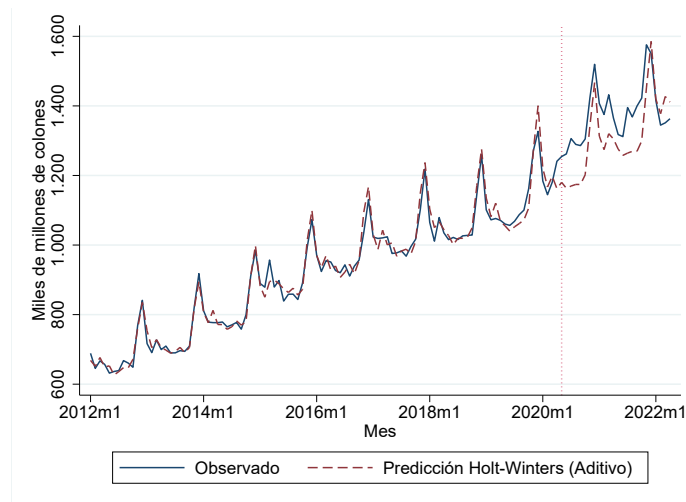
Figura B.6: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo de redes neuronales artificiales (RNA), a 24 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2020).

Fuente: Elaboración propia.

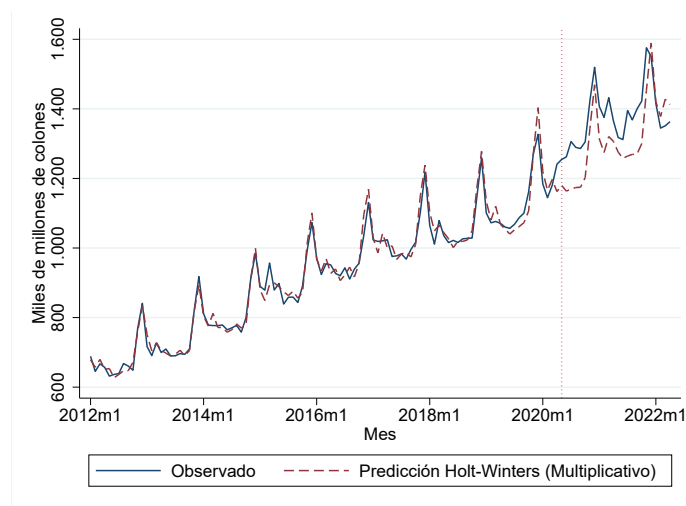
Figura B.7: Pronóstico de demanda de efectivo con un método Holt-Winters aditivo, a 24 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2020).

Fuente: Elaboración propia.

Figura B.8: Pronóstico de demanda de efectivo con un método Holt-Winters multiplicativo, a 24 meses.

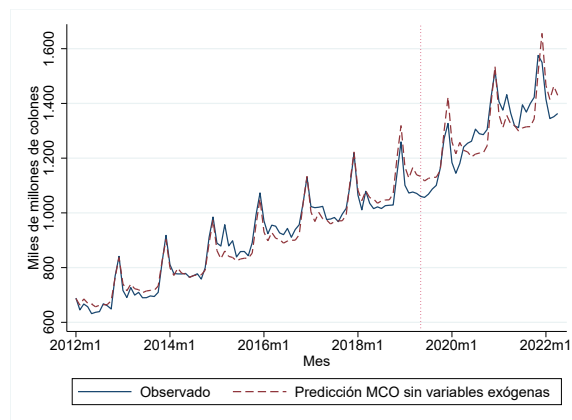


Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2020).

Fuente: Elaboración propia.

C. Anexo. Resultados de los modelos de pronóstico a 36 meses

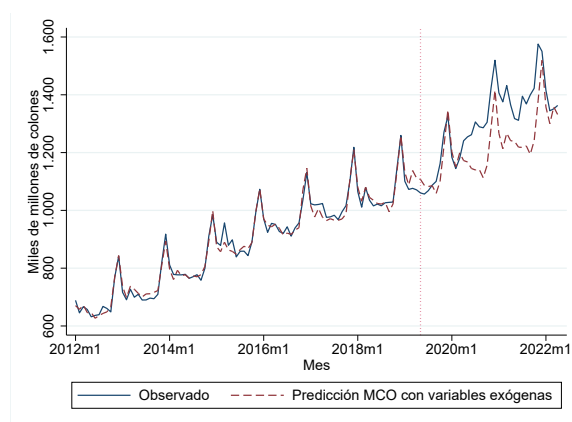
Figura C.1: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) sin variables exógenas, a 36 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2019).

Fuente: Elaboración propia.

Figura C.2: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) con variables exógenas, a 36 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2019).

Fuente: Elaboración propia.

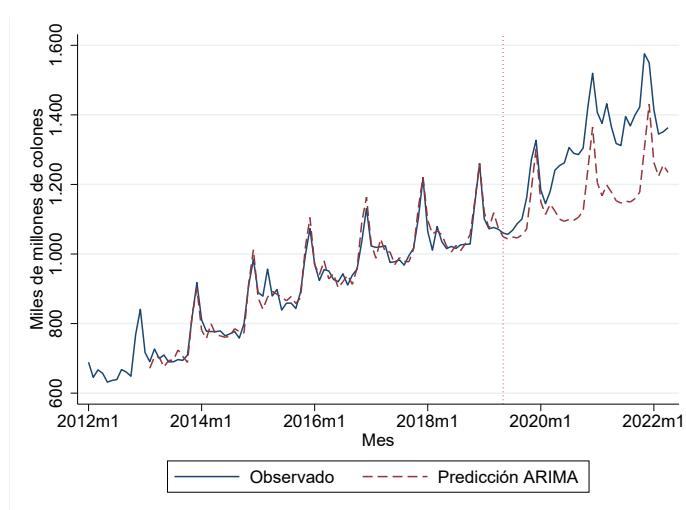
Figura C.3: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo de vector de corrección de errores (VECM), a 36 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2019).

Fuente: Elaboración propia.

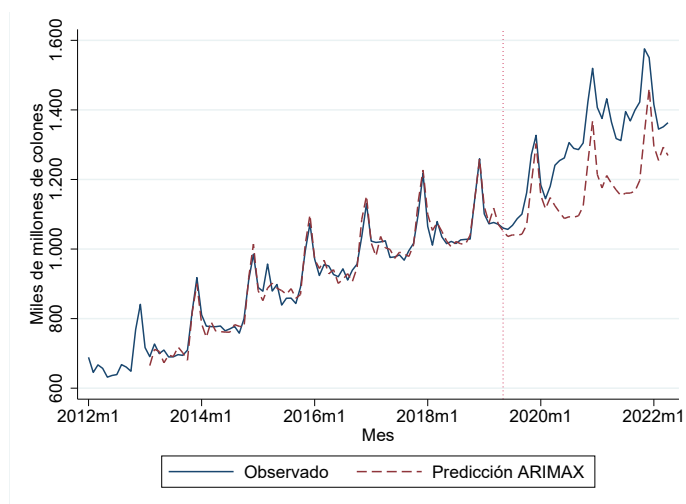
Figura C.4: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo autorregresivo integrado de medias móviles (ARIMA), a 36 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2019).

Fuente: Elaboración propia.

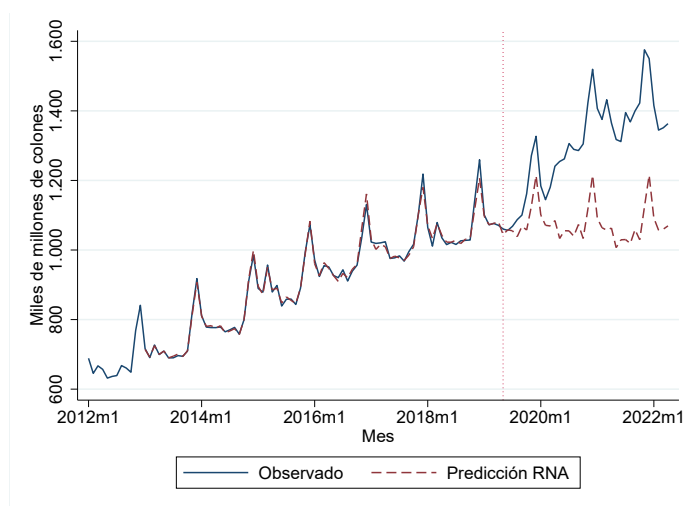
Figura C.5: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo autorregresivo integrado de medias móviles con variables exógenas (ARIMAX), a 36 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2019).

Fuente: Elaboración propia.

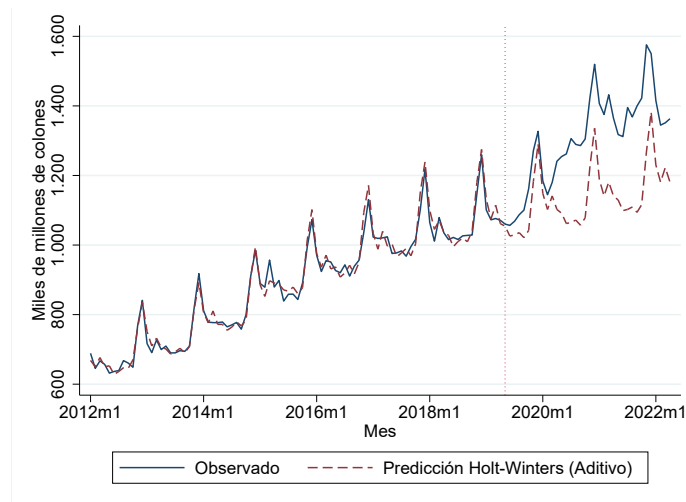
Figura C.6: Pronóstico de demanda de efectivo con un modelo de redes neuronales artificiales (RNA), a 36 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2019).

Fuente: Elaboración propia.

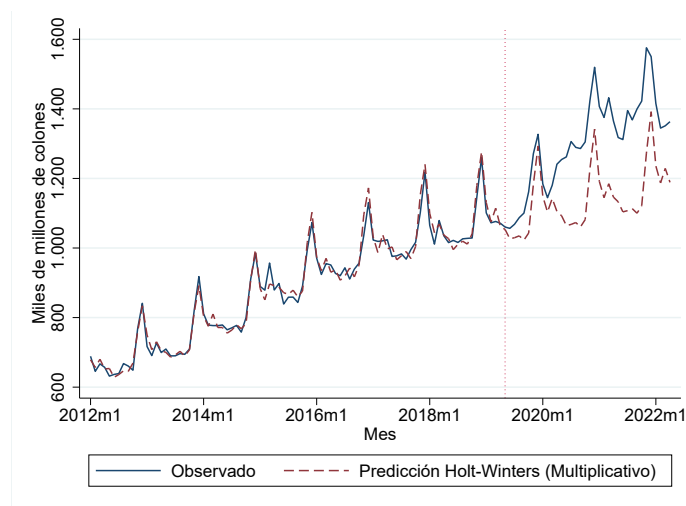
Figura C.7: Pronóstico de demanda de efectivo con un método Holt-Winters aditivo, a 36 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2019).

Fuente: Elaboración propia.

Figura C.8: Pronóstico de demanda de efectivo con un método Holt-Winters multiplicativo, a 36 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2019).

Fuente: Elaboración propia.

D. Anexo. Comparación de los modelos a 24 y 36 meses

Cuadro D.1: Comparación de los modelos dentro de muestra - Horizonte: 24 meses.

Modelo	RECM	EAM	EPAM	MASE
MCO sin variables exógenas	0,0341	0,0285	0,1034	0,3901
MCO con variables exógenas	0,0236	0,0172	0,0625	0,2359
VECM	0,0415	0,0332	0,1205	0,4550
ARIMA	0,0258	0,0207	0,0751	0,2836
ARIMAX	0,0254	0,0205	0,0745	0,2813
RNA	0,0060	0,0043	0,0156	0,0592
Holt-Winters (Aditivo)	0,0239	0,0189	0,0686	0,2590
Holt-Winters (Multiplicativo)	0,0239	0,0190	0,0689	0,2603

Nota: Para cada criterio, se indica en **negrita** el modelo con menor medida.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro D.2: Comparación de los modelos fuera de muestra - Horizonte: 24 meses.

Modelo	RECM	EAM	EPAM	MASE
MCO sin variables exógenas	0,0587	0,0539	0,1929	0,7384
MCO con variables exógenas	0,0973	0,0895	0,3202	1,2260
VECM	0,0960	0,0872	0,3120	1,1945
ARIMA	0,0682	0,0613	0,2192	0,8392
ARIMAX	0,0711	0,0635	0,2272	0,8698
RNA	0,1669	0,1579	0,5646	2,1630
Holt-Winters (Aditivo)	0,0701	0,0642	0,2297	0,8794
Holt-Winters (Multiplicativo)	0,0700	0,0641	0,2295	0,8787

Nota: Para cada criterio, se indica en **negrita** el modelo con menor medida.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro D.3: Comparación de los modelos dentro de muestra - Horizonte: 36 meses.

Modelo	RECM	EAM	EPAM	MASE
MCO sin variables exógenas	0,0331	0,0268	0,0975	0,3695
MCO con variables exógenas	0,0216	0,0168	0,0613	0,2322
VECM	0,0403	0,0328	0,1192	0,4521
ARIMA	0,0251	0,0203	0,0738	0,2798
ARIMAX	0,0244	0,0198	0,0719	0,2727
RNA	0,0105	0,0072	0,0261	0,0992
Holt-Winters (Aditivo)	0,0220	0,0179	0,0650	0,2463
Holt-Winters (Multiplicativo)	0,0221	0,0180	0,0654	0,2479

Nota: Para cada criterio, se indica en **negrita** el modelo con menor medida.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro D.4: Comparación de los modelos fuera de muestra - Horizonte: 36 meses.

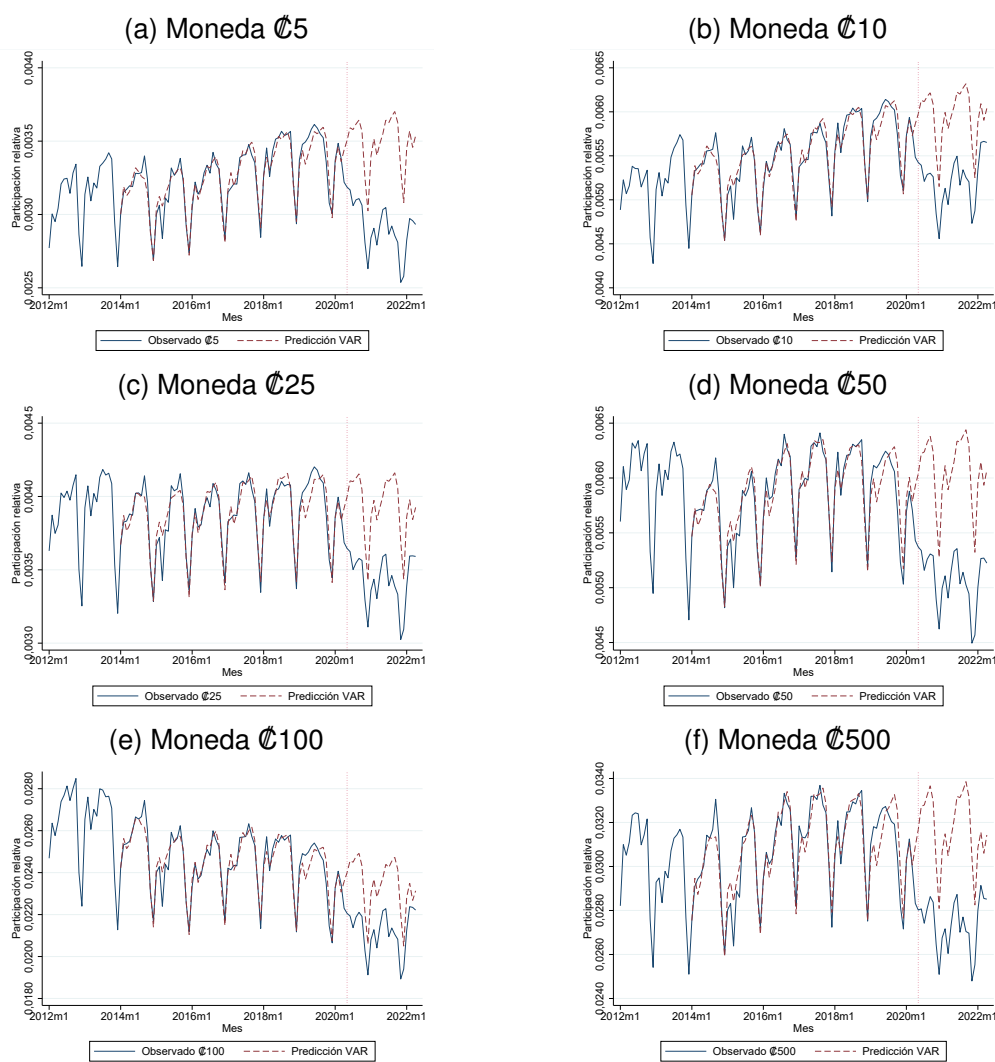
Modelo	RECM	EAM	EPAM	MASE
MCO sin variables exógenas	0,0484	0,0438	0,1571	0,6039
MCO con variables exógenas	0,0863	0,0715	0,2560	0,9851
VECM	0,0618	0,0521	0,1866	0,7178
ARIMA	0,1240	0,1092	0,3910	1,5049
ARIMAX	0,1181	0,1034	0,3702	1,4244
RNA	0,2124	0,1891	0,6768	2,6055
Holt-Winters (Aditivo)	0,1508	0,1341	0,4803	1,8483
Holt-Winters (Multiplicativo)	0,1477	0,1313	0,4702	1,8095

Nota: Para cada criterio, se indica en **negrita** el modelo con menor medida.

Fuente: Elaboración propia.

E. Anexo. Resultados de los modelos de la participación relativa de cada denominación a 24 meses

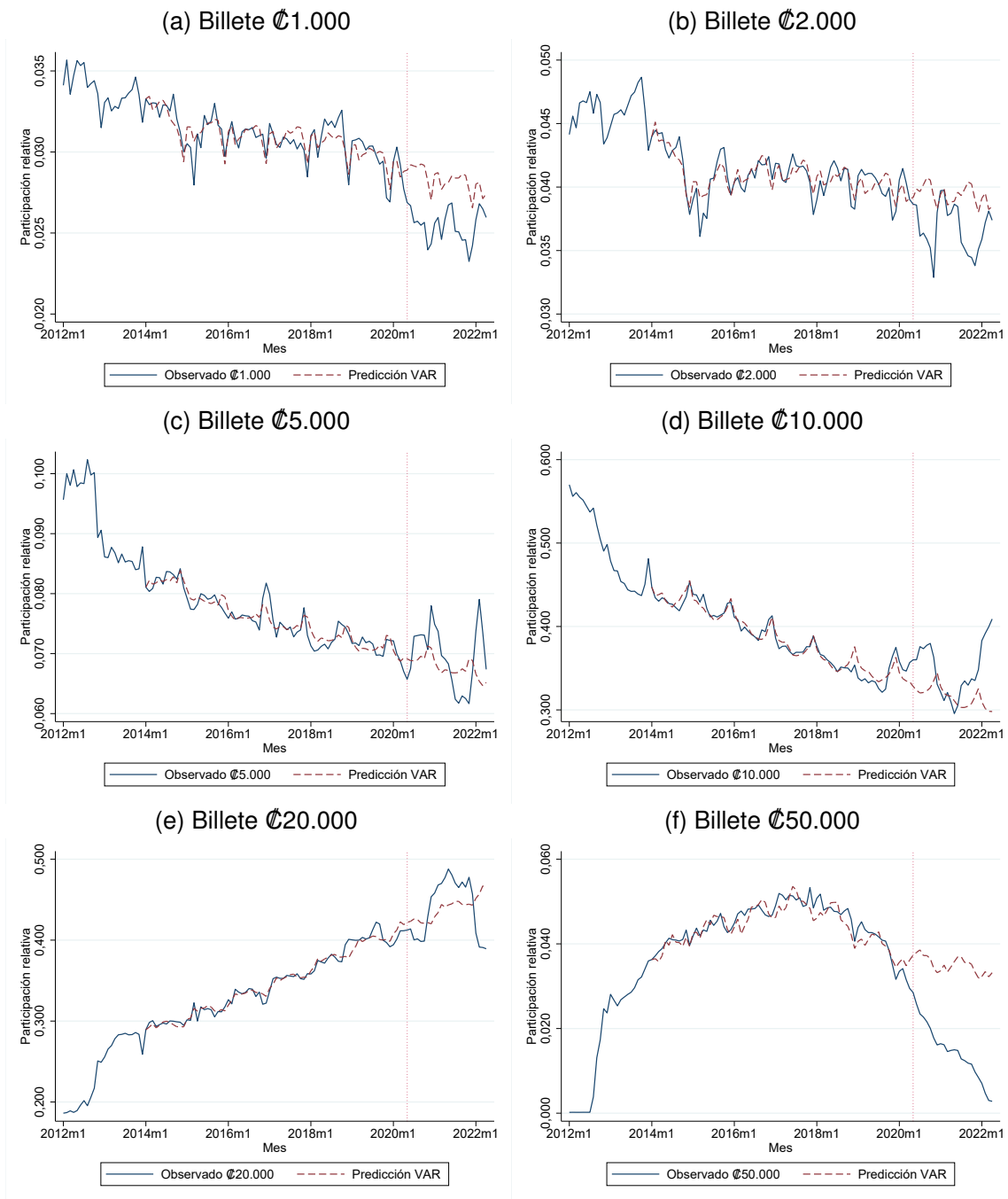
Figura E.1: Pronóstico de participación relativa de monedas, a 24 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2020).

Fuente: Elaboración propia.

Figura E.2: Pronóstico de participación relativa de billetes, a 24 meses.

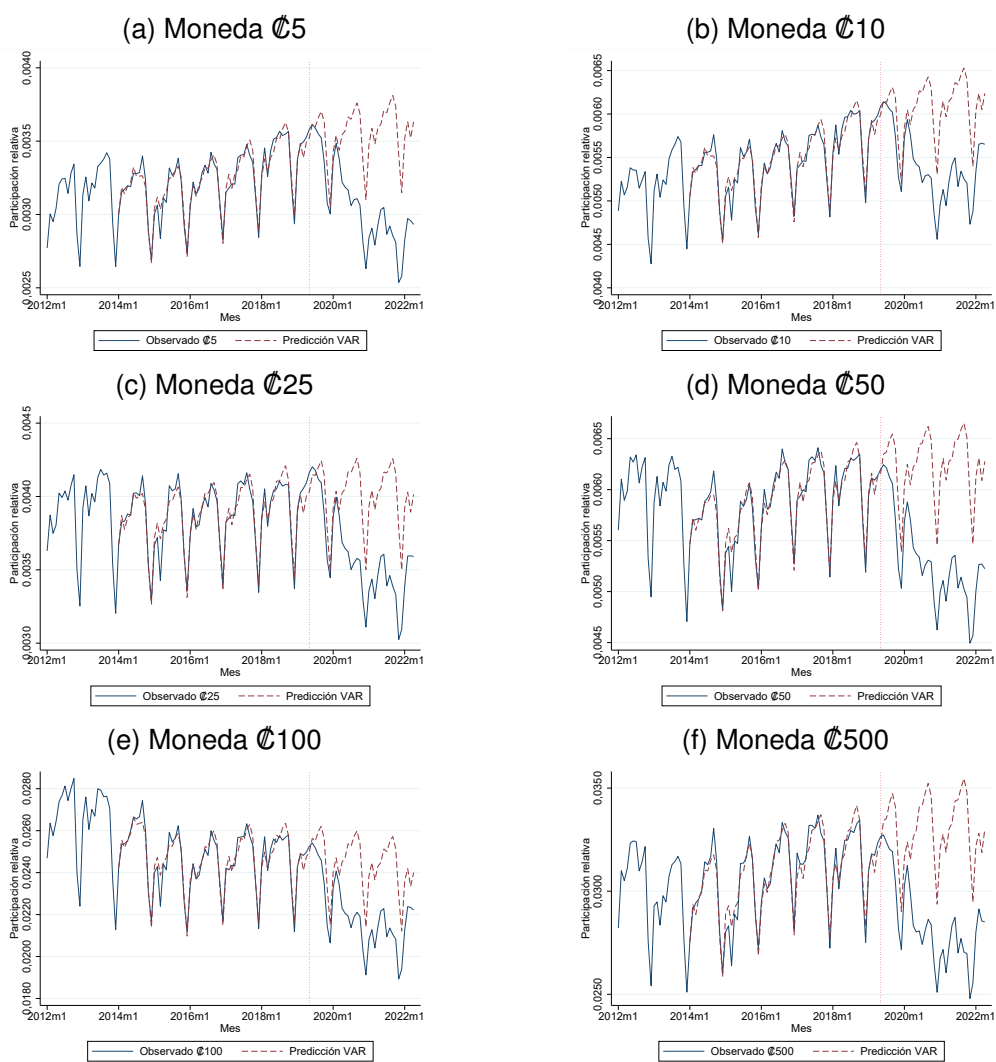


Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2020).

Fuente: Elaboración propia.

F. Anexo. Resultados de los modelos de la participación relativa de cada denominación a 36 meses

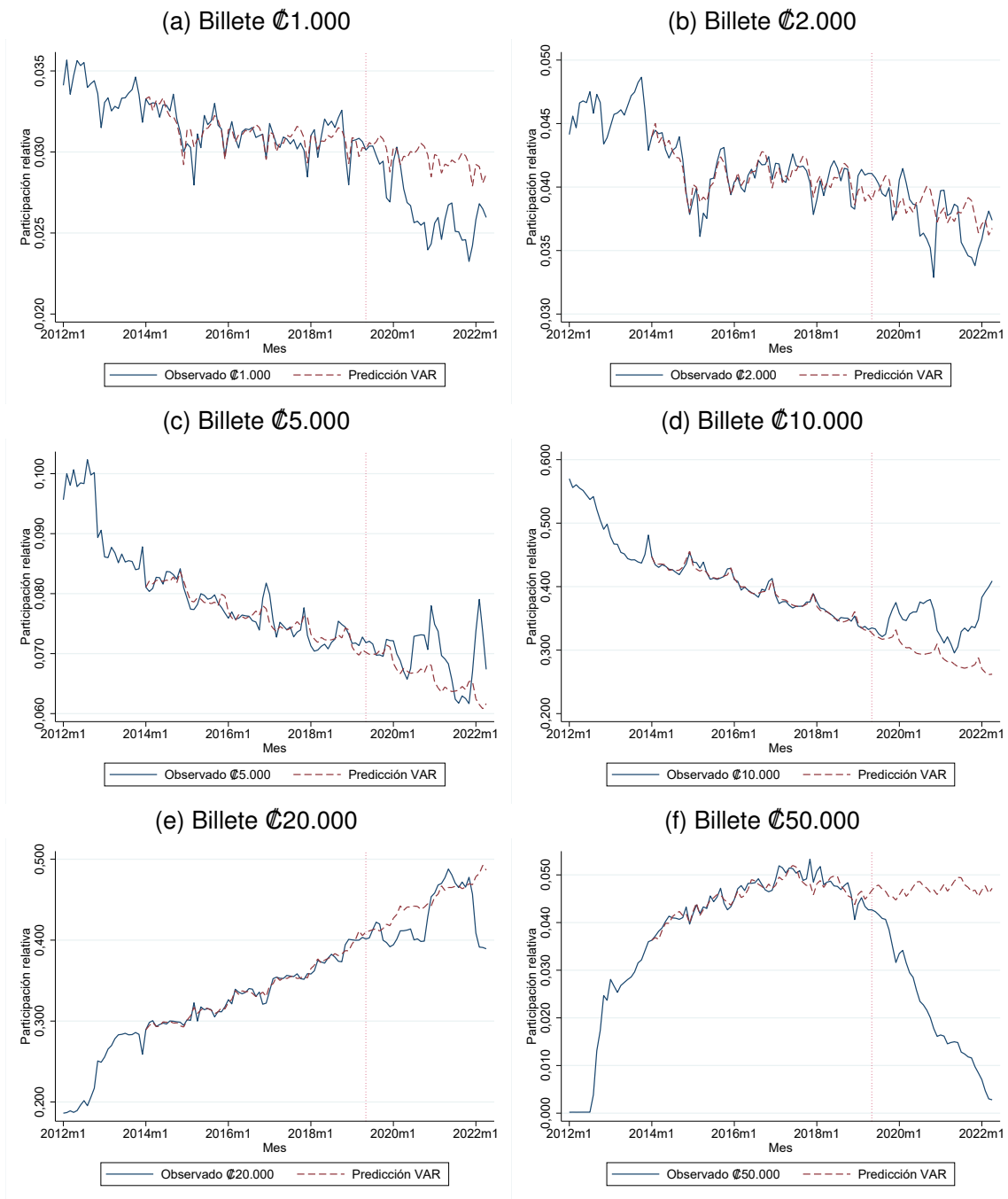
Figura F.1: Pronóstico de participación relativa de monedas, a 36 meses.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2019).

Fuente: Elaboración propia.

Figura F.2: Pronóstico de participación relativa de billetes, a 36 meses.

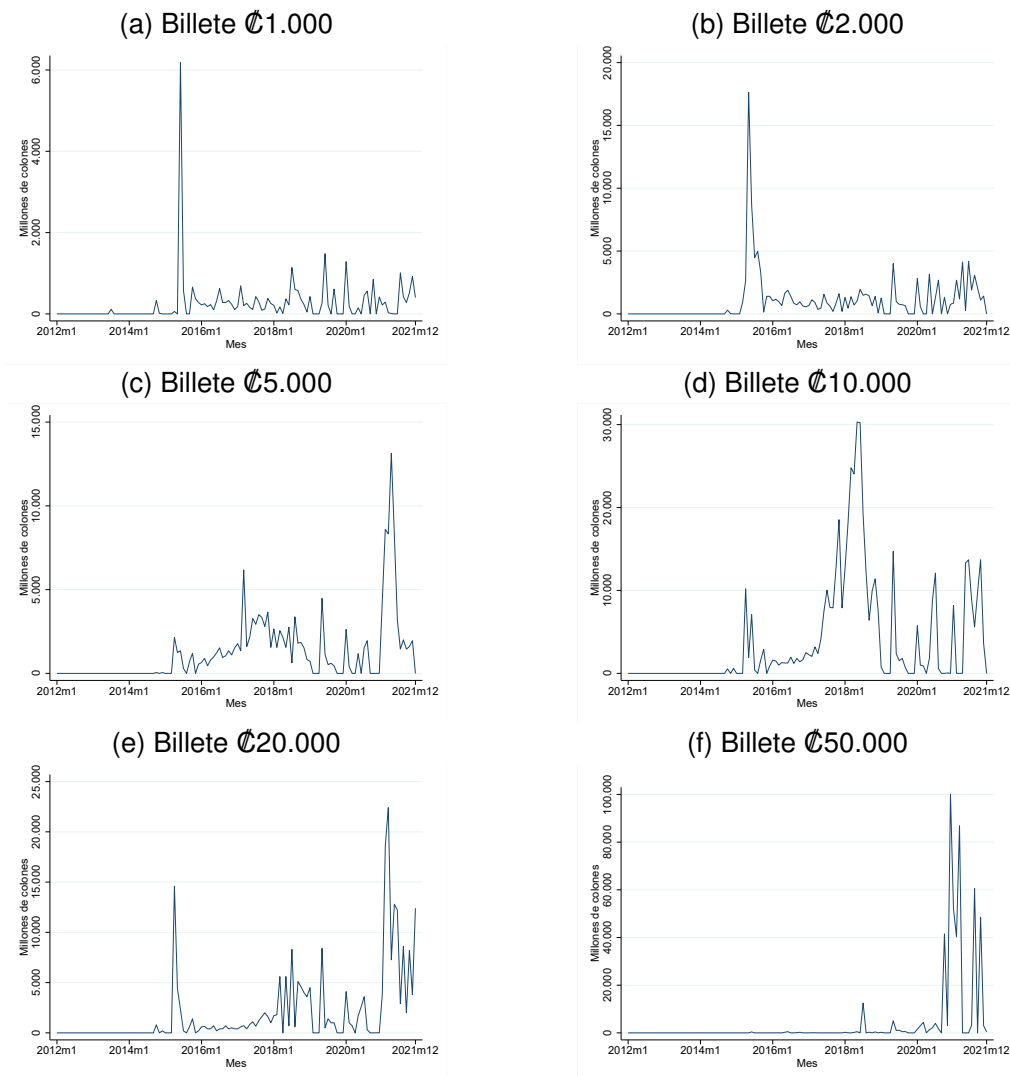


Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2019).

Fuente: Elaboración propia.

G. Anexo. Cantidad de billetes destruidos por mes

Figura G.1: Cantidad de billetes destruidos por mes de la nueva familia (en millones de colones), de enero 2012 a diciembre 2021.



Fuente: Elaboración propia.

Cuadro G.1: Porcentaje de meses sin destrucción de billetes, por denominación (enero 2012 a diciembre 2021).

Denominación	% de meses sin destrucción de billetes
1.000 colones (₡1.000)	43,33 %
2.000 colones (₡2.000)	40,00 %
5.000 colones (₡5.000)	43,33 %
10.000 colones (₡10.000)	42,50 %
20.000 colones (₡20.000)	41,67 %
50.000 colones (₡20.000)	65,83 %

Fuente: Elaboración propia.

H. Anexo. Modelos de pronóstico de billete deteriorado

Figura H.1: Pronóstico de billete de ₡1.000 deteriorado, a 12 meses.

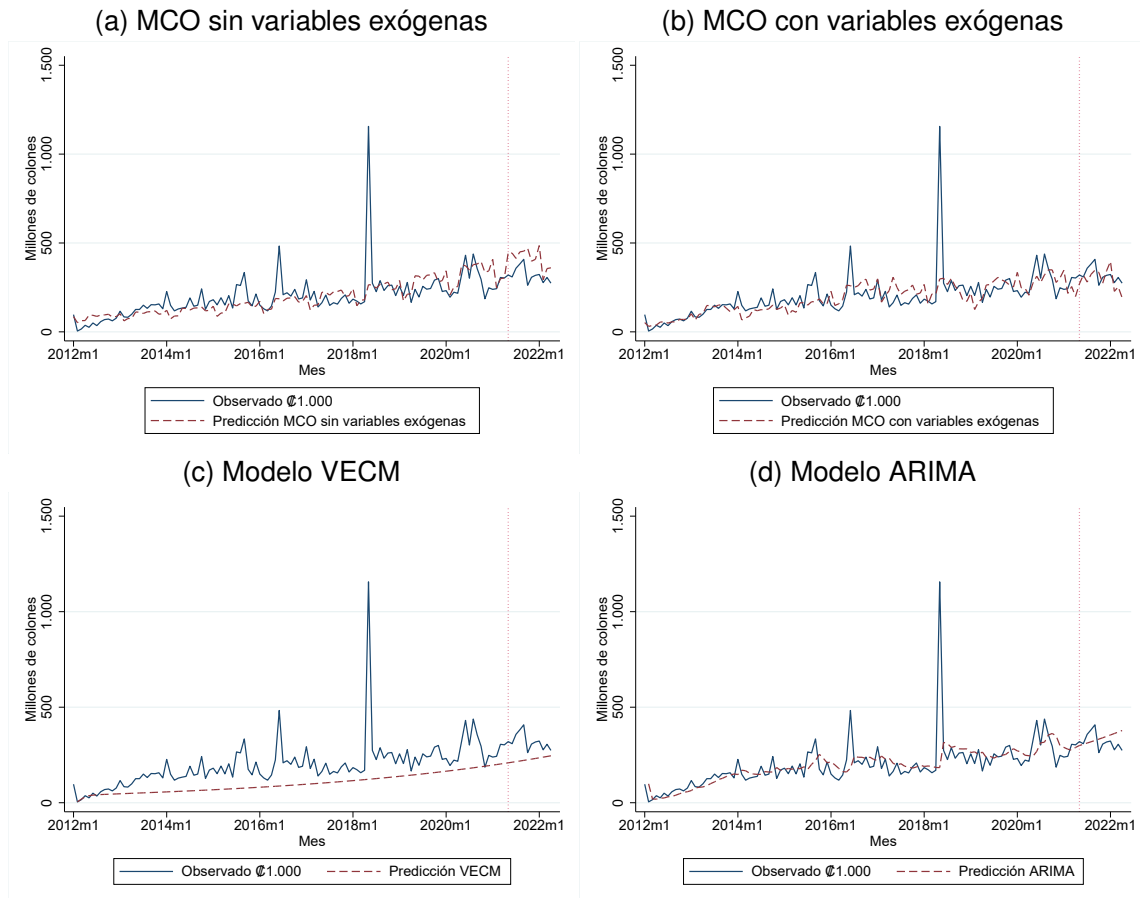
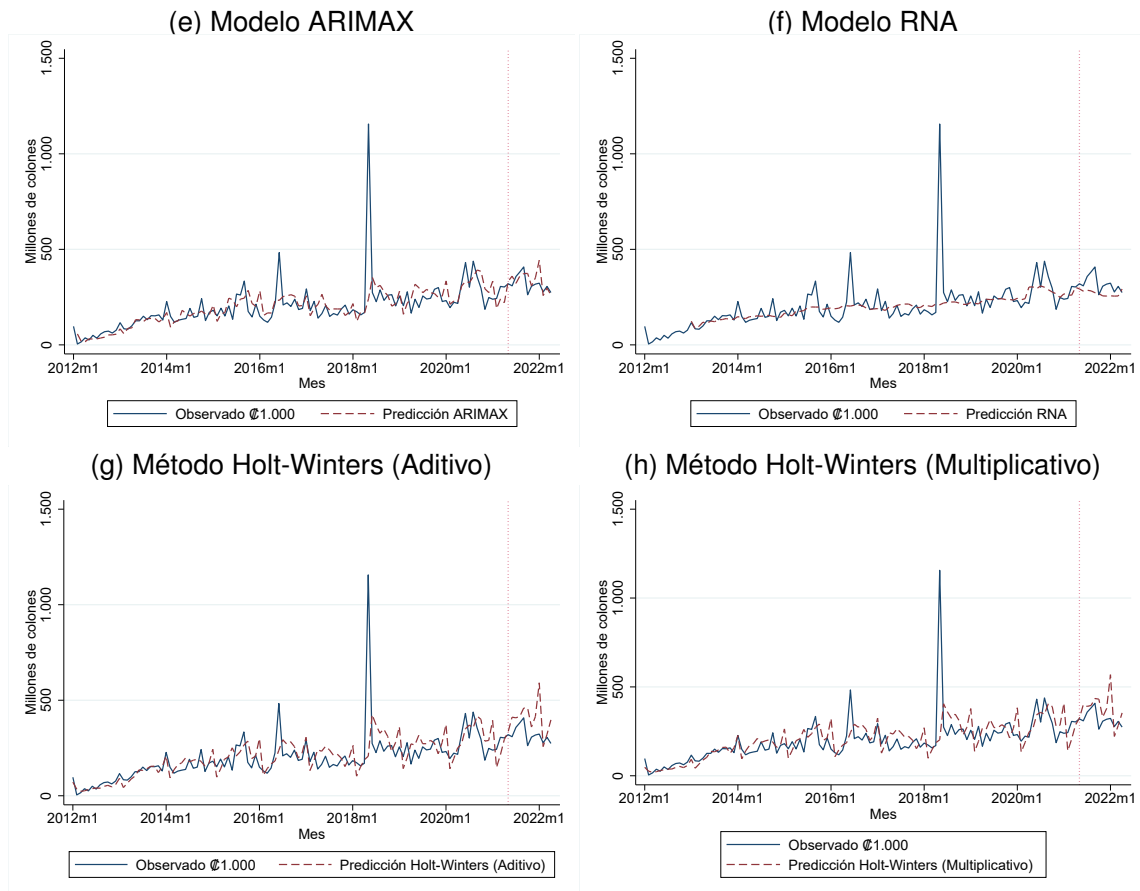


Figura H.1: Pronóstico de billete de ₡1.000 deteriorado, a 12 meses (Continuación).



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2021).

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro H.1: Pronóstico de billete de ₡1.000 deteriorado, comparación de los modelos fuera de muestra - Horizonte: 12 meses.

Modelo	RECM	EAM	EPAM	MASE
MCO sin variables exógenas	0,2943	0,2575	1,3174	0,6097
MCO con variables exógenas	0,1970	0,1800	0,9204	0,4264
VECM	0,3728	0,3379	1,7212	0,8003
ARIMA	0,1830	0,1601	0,8185	0,3791
ARIMAX	0,1561	0,1143	0,5847	0,2707
RNA	0,2030	0,1737	0,8843	0,4114
Holt-Winters (Aditivo)	0,2953	0,2294	1,1744	0,5432
Holt-Winters (Multiplicativo)	0,2590	0,1936	0,9921	0,4586

Nota: Para cada criterio, se indica en **negrita** el modelo con menor medida.

Fuente: Elaboración propia.

Figura H.2: Pronóstico de billete de ₡2.000 deteriorado, a 12 meses.

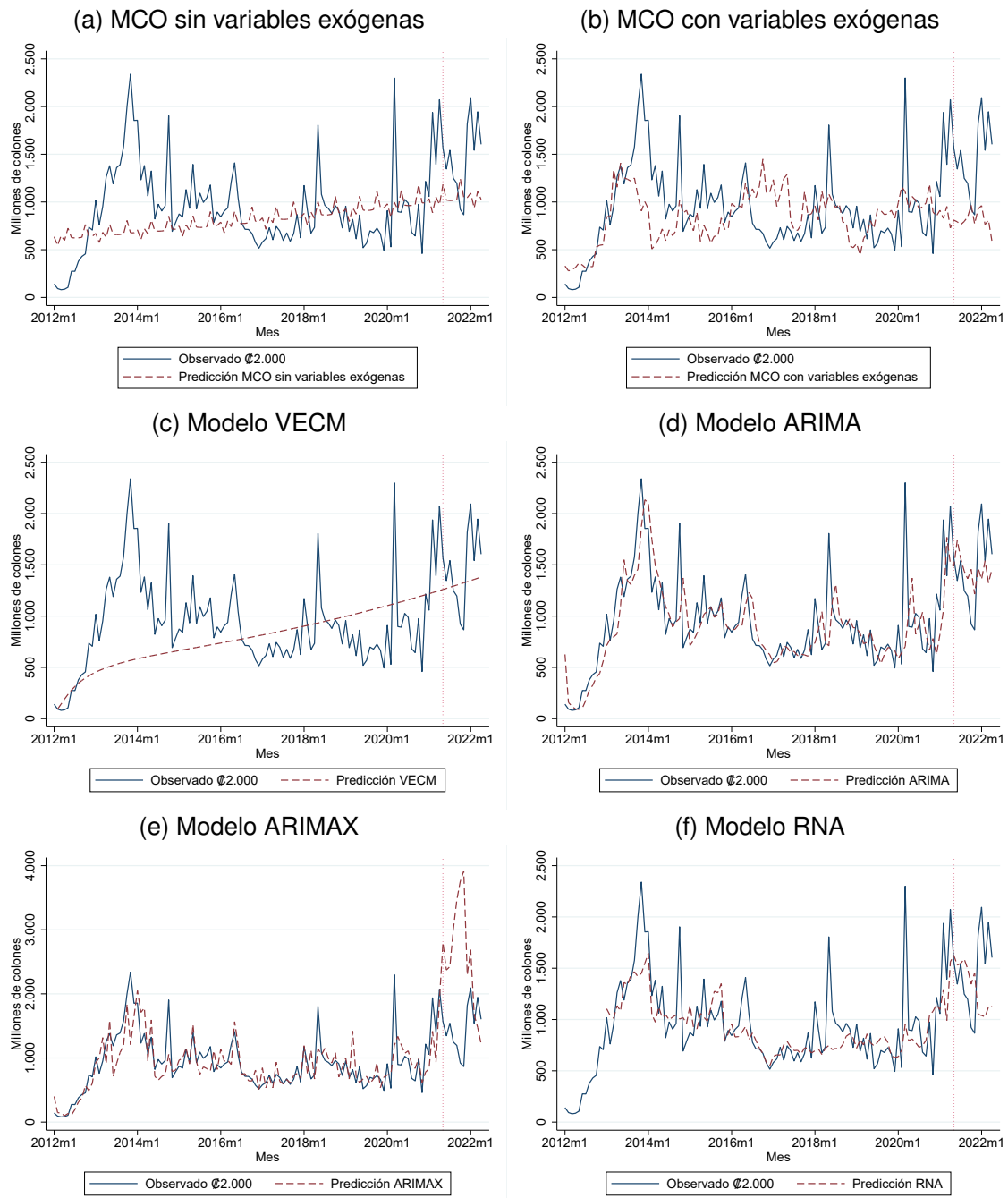
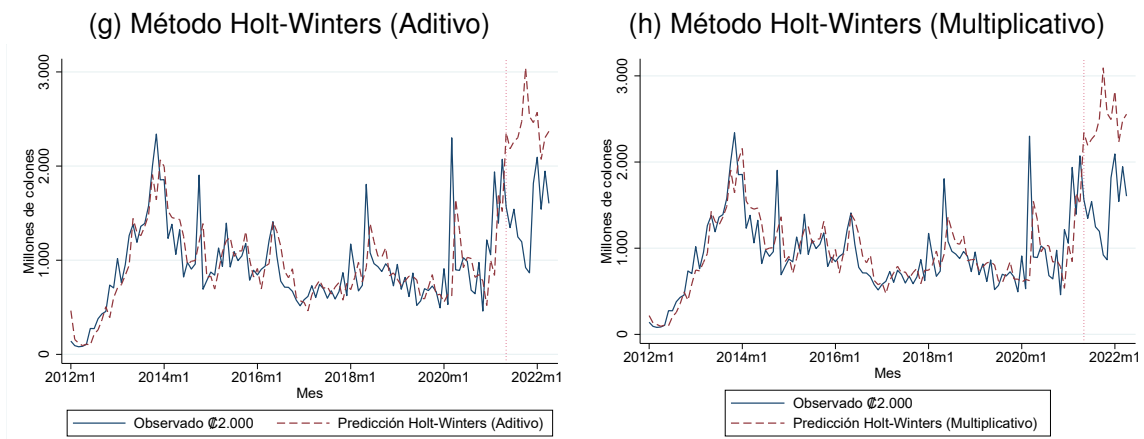


Figura H.2: Pronóstico de billete de ₡2.000 deteriorado, a 12 meses (Continuación).



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2021).

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro H.2: Pronóstico de billete de ₡2.000 deteriorado, comparación de los modelos fuera de muestra - Horizonte: 12 meses.

Modelo	RECM	EAM	EPAM	MASE
MCO sin variables exógenas	0,4094	0,3776	1,7838	0,7200
MCO con variables exógenas	0,6384	0,5744	2,7106	1,0955
VECM	0,2664	0,2281	1,0821	0,4351
ARIMA	0,2613	0,2097	0,9966	0,3999
ARIMAX	0,7796	0,6311	3,0199	1,2035
RNA	0,3998	0,3403	1,6122	0,6490
Holt-Winters (Aditivo)	0,6072	0,5200	2,4854	0,9916
Holt-Winters (Multiplicativo)	0,6272	0,5516	2,6344	1,0520

Nota: Para cada criterio, se indica en **negrita** el modelo con menor medida.

Fuente: Elaboración propia.

Figura H.3: Pronóstico de billete de ₡5.000 deteriorado, a 12 meses.

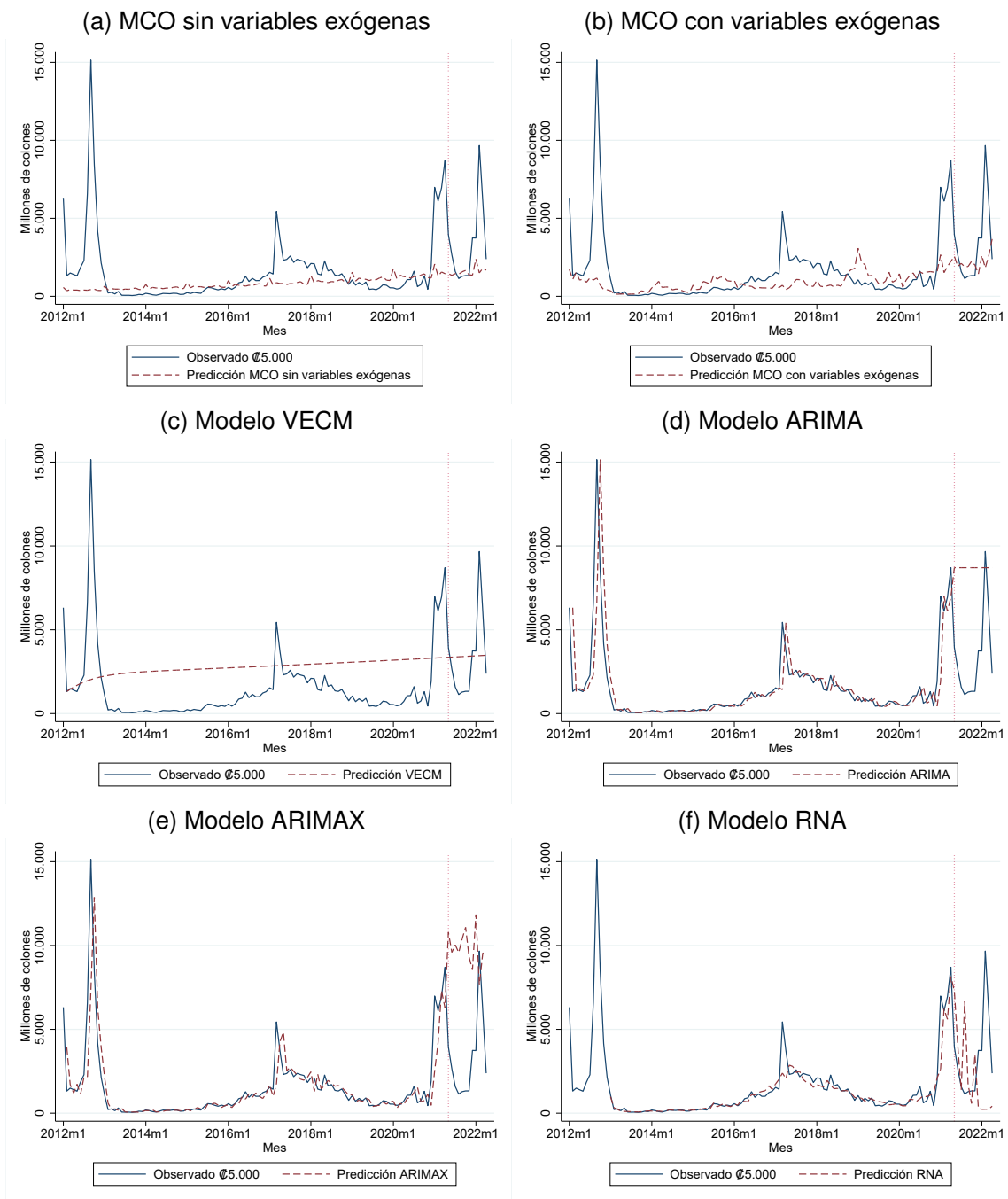
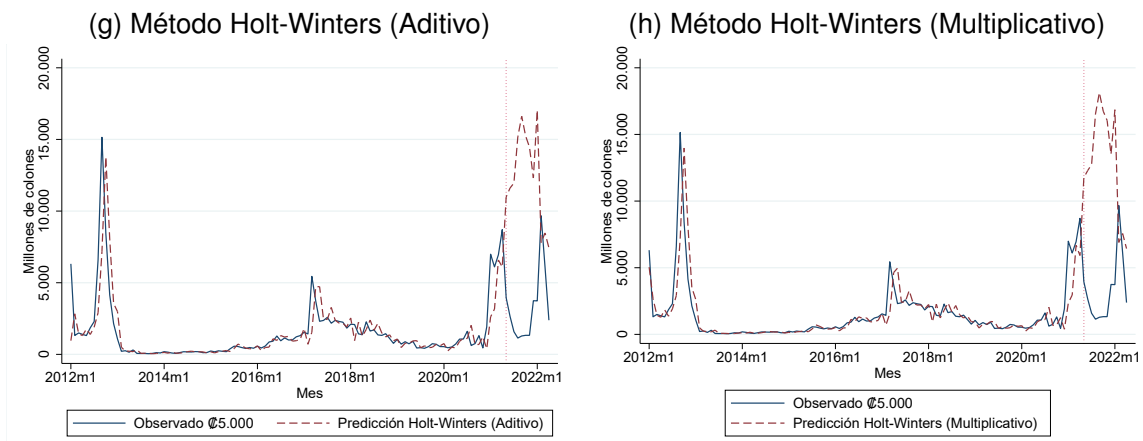


Figura H.3: Pronóstico de billete de ₡5.000 deteriorado, a 12 meses (Continuación).



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2021).

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro H.3: Pronóstico de billete de ₡5.000 deteriorado, comparación de los modelos fuera de muestra - Horizonte: 12 meses.

Modelo	RECM	EAM	EPAM	MASE
MCO sin variables exógenas	0,8128	0,6117	2,7566	0,5290
MCO con variables exógenas	0,7046	0,5950	2,7115	0,5145
VECM	0,7134	0,6040	2,8127	0,5224
ARIMA	1,3855	1,2360	5,7961	1,0689
ARIMAX	1,5116	1,3716	6,4231	1,1862
RNA	1,9891	1,5957	7,2496	1,3800
Holt-Winters (Aditivo)	1,7649	1,5737	7,3762	1,3610
Holt-Winters (Multiplicativo)	1,8196	1,6160	7,5741	1,3975

Nota: Para cada criterio, se indica en **negrita** el modelo con menor medida.

Fuente: Elaboración propia.

Figura H.4: Pronóstico de billete de ₡10.000 deteriorado, a 12 meses.

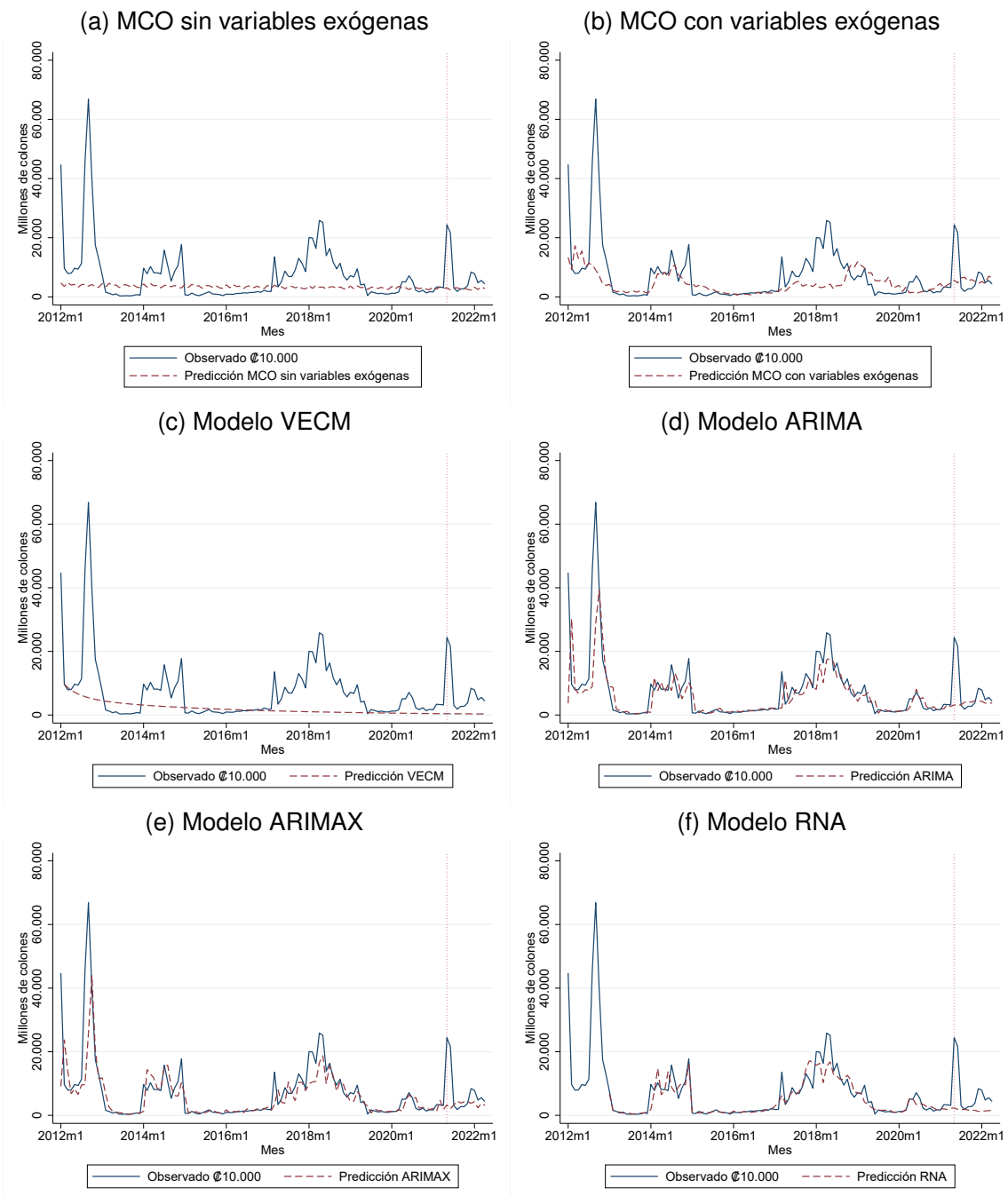
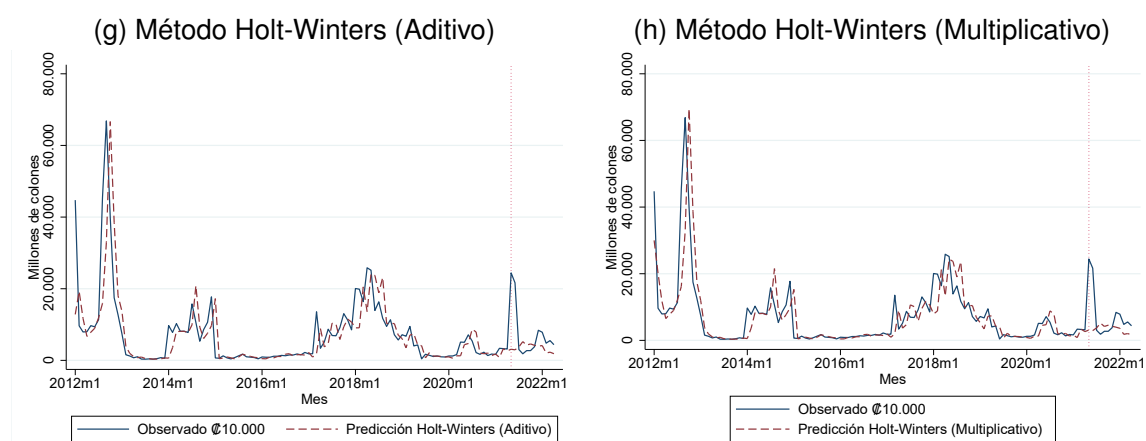


Figura H.4: Pronóstico de billete de ₡10.000 deteriorado, a 12 meses (Continuación).



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2021).

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro H.4: Pronóstico de billete de ₡10.000 deteriorado, comparación de los modelos fuera de muestra - Horizonte: 12 meses.

Modelo	RECM	EAM	EPAM	MASE
MCO sin variables exógenas	1,0391	0,7603	3,2979	0,4446
MCO con variables exógenas	0,8498	0,7132	3,1600	0,4171
VECM	2,7913	2,6872	11,8902	1,5713
ARIMA	0,9152	0,6591	2,8687	0,3854
ARIMAX	1,0165	0,7548	3,2910	0,4414
RNA	1,4222	1,2077	5,2840	0,7062
Holt-Winters (Aditivo)	1,0426	0,8632	3,7890	0,5048
Holt-Winters (Multiplicativo)	1,0747	0,9015	3,9588	0,5271

Nota: Para cada criterio, se indica en **negrita** el modelo con menor medida.

Fuente: Elaboración propia.

Figura H.5: Pronóstico de billete de ₡20.000 deteriorado, a 12 meses.

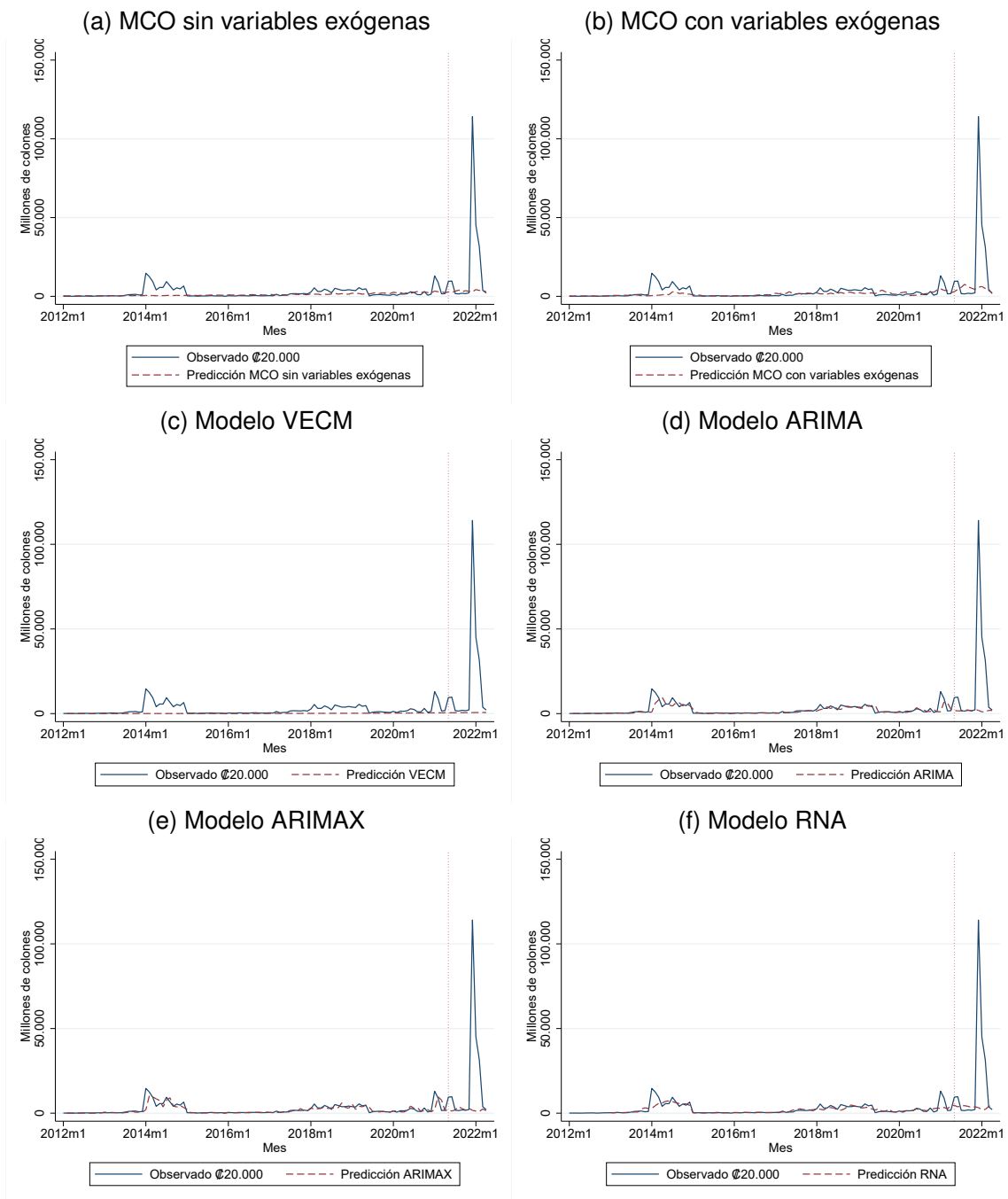
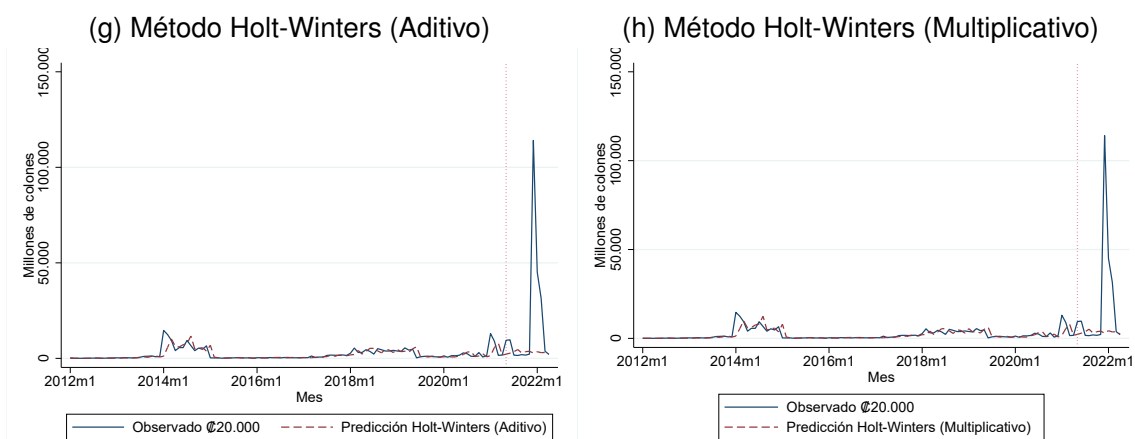


Figura H.5: Pronóstico de billete de ₡20.000 deteriorado, a 12 meses (Continuación).



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (mayo 2021).

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro H.5: Pronóstico de billete de ₡20.000 deteriorado, comparación de los modelos fuera de muestra - Horizonte: 12 meses.

Modelo	RECM	EAM	EPAM	MASE
MCO sin variables exógenas	1,5609	1,1806	5,0131	0,7422
MCO con variables exógenas	1,4515	1,2416	5,3929	0,7805
VECM	2,7271	2,3336	10,0224	1,4671
ARIMA	2,0057	1,3336	5,5449	0,8384
ARIMAX	2,0471	1,4438	6,0561	0,9076
RNA	1,6938	1,3171	5,6259	0,8280
Holt-Winters (Aditivo)	1,6361	1,2493	5,3087	0,7854
Holt-Winters (Multiplicativo)	1,5894	1,2303	5,2467	0,7735

Nota: Para cada criterio, se indica en **negrita** el modelo con menor medida.

Fuente: Elaboración propia.

I. Anexo. Estimación de la demanda de numerario para fin de año

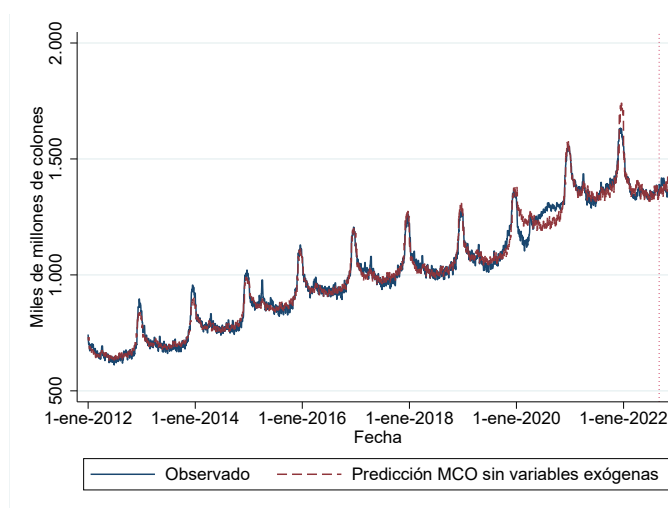
Cuadro I.1: Comparación dentro de muestra de los modelos para pronosticar la demanda de numerario para fin de año.

Modelo	RECM	EAM	EPAM	MASE
MCO sin variables exógenas	0,0252	0,0184	0,0667	0,2394
MCO con variables exógenas	0,0229	0,0179	0,0646	0,2319
VECM	0,0235	0,0183	0,0661	0,2372
ARIMA	0,0109	0,0080	0,0291	0,1042
ARIMAX	0,0084	0,0060	0,0218	0,0781
RNA	0,0067	0,0048	0,0174	0,0625
Holt-Winters (Aditivo)	0,0098	0,0076	0,0277	0,0992
Holt-Winters (Multiplicativo)	0,0098	0,0077	0,0277	0,0994

Nota: Para cada criterio, se indica en **negrita** el modelo con menor medida.

Fuente: Elaboración propia.

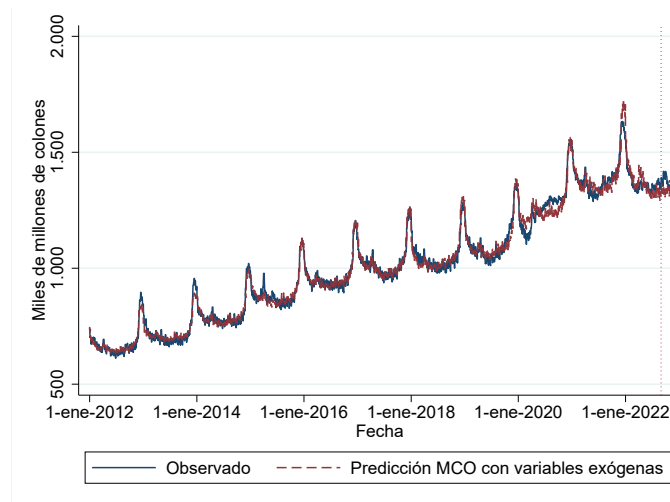
Figura I.1: Pronóstico de demanda de efectivo para fin de año con un modelo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) sin variables exógenas, a 61 días.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (31 de agosto de 2022).

Fuente: Elaboración propia.

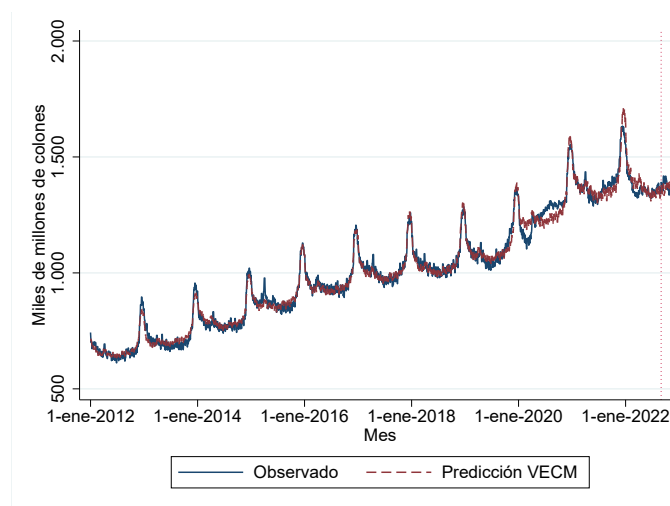
Figura I.2: Pronóstico de demanda de efectivo para fin de año con un modelo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) con variables exógenas, a 61 días.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (31 de agosto de 2022).

Fuente: Elaboración propia.

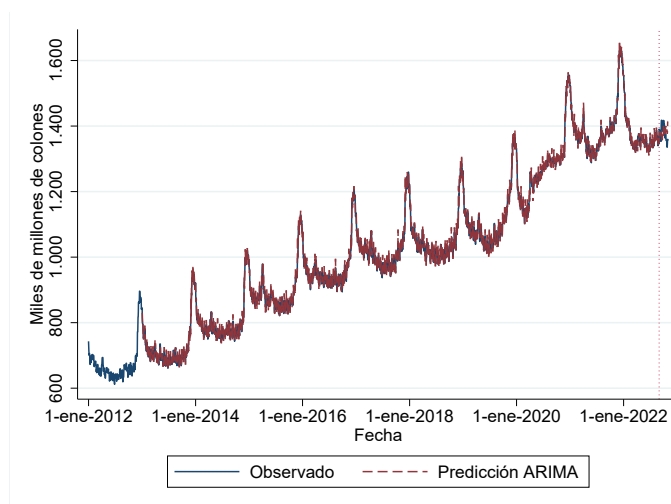
Figura I.3: Pronóstico de demanda de efectivo para fin de año con un modelo de vector de corrección de errores (VECM), a 61 días.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (31 de agosto de 2022).

Fuente: Elaboración propia.

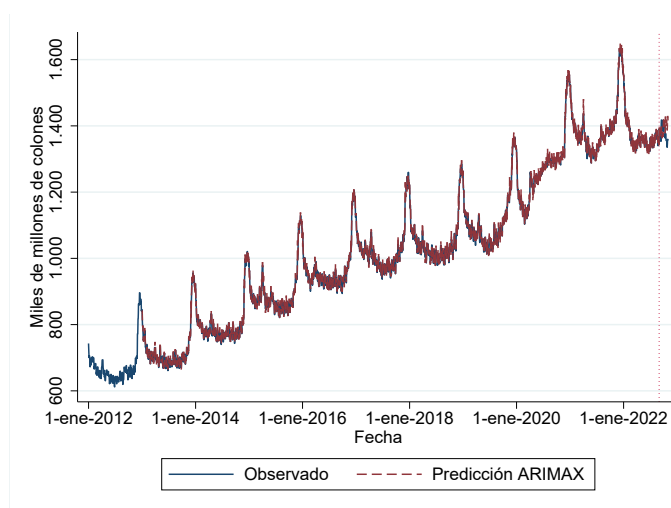
Figura I.4: Pronóstico de demanda de efectivo para fin de año con un modelo autorregresivo integrado de medias móviles (ARIMA), a 61 días.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (31 de agosto de 2022).

Fuente: Elaboración propia.

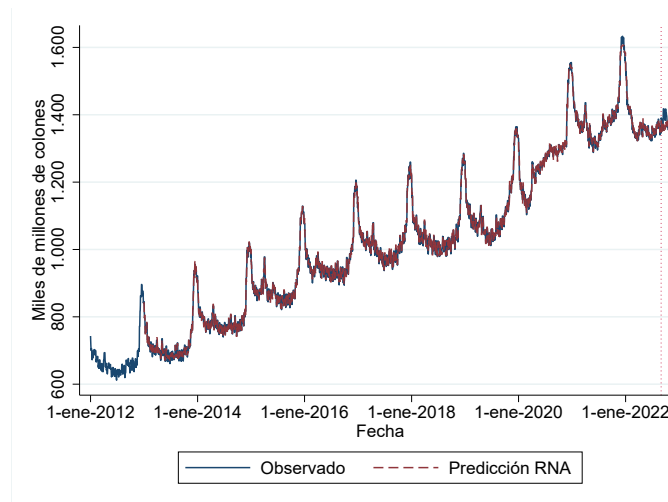
Figura I.5: Pronóstico de demanda de efectivo para fin de año con un modelo autorregresivo integrado de medias móviles con variables exógenas (ARIMAX), a 61 días.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (31 de agosto de 2022).

Fuente: Elaboración propia.

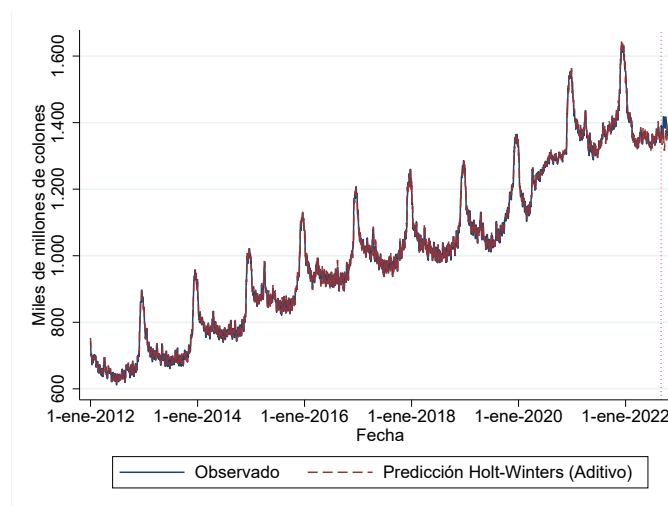
Figura I.6: Pronóstico de demanda de efectivo para fin de año con un modelo de redes neuronales artificiales (RNA), a 61 días.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (31 de agosto de 2022).

Fuente: Elaboración propia.

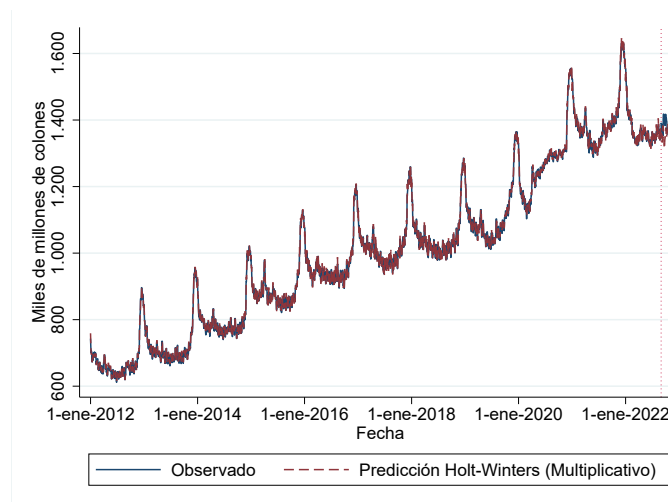
Figura I.7: Pronóstico de demanda de efectivo para fin de año con un método Holt-Winters aditivo, a 61 días.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (31 de agosto de 2022).

Fuente: Elaboración propia.

Figura I.8: Pronóstico de demanda de efectivo para fin de año con un método Holt-Winters multiplicativo, a 61 días.



Nota: La línea vertical punteada indica el periodo a partir del cual inicia la predicción fuera de muestra (31 de agosto de 2022).

Fuente: Elaboración propia.